

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

А.В. БУЛАШЕНКО

**ПРОЦЕСИ В ЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРОННИХ СХЕМАХ.
ОСНОВИ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛІЗУ.
ПРАКТИКУМ**

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для студентів,
які навчаються за спеціальністю 172 «Телекомунікації та радіотехніка»
спеціалізацій «Радіотехнічні інформаційні системи», «Радіозв'язок і оброблення
сигналів», «Радіосистемна інженерія»*

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2020

Рецензент Могильний Сергій Борисович, к-т техн. наук, доц.

За редакцією укладача

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 10 від 18.06.2020 р.) за поданням Вченої ради радіотехнічного факультету (протокол № 04/2020 від 27.04.2020 р.)

Електронне мережне навчальне видання



Булашенко Андрій Васильович, ст. викладач

ПРОЦЕСИ В ЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРОННИХ СХЕМАХ. ОСНОВИ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛІЗУ ПРАКТИКУМ

Процеси в лінійних електронних схемах. Основи спектрального аналізу. Практикум. [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студентів спеціальності 172 «Телекомунікації та радіотехніка», спеціалізацій «Радіотехнічні інформаційні системи», «Радіозв'язок і оброблення сигналів», «Радіосистемна інженерія» / А. В. Булашенко; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл 1.04 Мбайт). – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. – 54с.

Посібник містить приклади розв'язання задач, що виконуються на практичних заняттях кредитного модуля «Процеси в лінійних електронних схемах» та мають на меті одержання практичних навичок при розв'язанні задач розрахунку спектрів простих сигналів у лінійних колах та розрахунок кіл негармонічної дії.

Посібник буде корисний студентам та викладачам, що мають на меті навчитися розв'язувати практичні задачі за даною тематикою.

© А.В. Булашенко, 2020
© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020

ЗМІСТ

Вступ.....	4
1. КОРОТКІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ.....	4
1.1. Знаходження реакції кола на довільну дію	4
1.2. Спектральний аналіз періодичних негармонічних сигналів	5
1.3. Спектральний аналіз неперіодичних гармонічних сигналів	8
1.4. Властивості перетворення Фур'є.....	11
2. ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАНИХ ЗАДАЧ	14
2.1. Проходження гармонічних періодичних сигналів через лінійні кола.....	14
2.2. Визначення ФСТ сигналів напруги та струму	19
2.3. Визначення ФСТ напруги та струму на виході схеми	29
2.4. Визначення коефіцієнтів передачі.....	33
2.5. Розрахунок сигналів, поданих рядами Фур'є.....	35
2.6. Періодична послідовність сигналів.....	38
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ.....	44
ДОДАТОК А.....	48
ДОДАТОК Б.....	49
ДОДАТОК В	50
ДОДАТОК Г.....	51
ДОДАТОК Д.....	53
ДОДАТОК Е	54

Вступ

Навчальний посібник містить приклади розв'язання задач, що виконуються на практичних заняттях кредитного модуля «Процеси в лінійних електронних схемах» та мають на меті одержання практичних навичок при розв'язанні задач за даною тематикою.

Навчальний посібник є структурованим та містить задачі різного типу складності. В додатку А є зразок варіанту модульної контрольної роботи, яка виконується після вивчення даної теми.

1. КОРОТКІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

1.1. Знаходження реакції кола на довільну дію

Математичним апаратом для спектрального подання сигналів є апарат рядів Фур'є для періодичних функцій та інтегралів Фур'є для неперіодичних функцій.

Аналіз кола під дією кожної окремої гармонічної складової здійснюється за допомогою відомих методів аналізу кіл гармонічного струму.

Знаходження реакції кола на довільну дію струму чи напруги

Припустимо, що є лінійне коло (рис. 1.1).

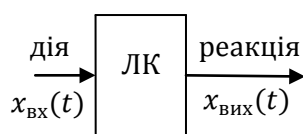


Рисунок 1.1

Є дія $x_{BX}(t)$ і реакція $x_{BIX}(t)$ на неї. Дія і реакція зв'язані між собою схемною функцією

$$F(\omega) = \begin{Bmatrix} K_U, & K_I \\ Z_{BX}, & Z_{ПЕР} \\ Y_{BX}, & Y_{ПЕР} \end{Bmatrix}.$$

Нехай у колі діє періодичний сигнал, що описується рядом Фур'є

$$x_{BX}(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega t + \varphi_X).$$

Для кожної гармонічної складової записуємо її комплексну амплітуду, яку множимо на схемну функцію на даній частоті.

$$A_n \cos(n\Omega t + \varphi_X) \rightarrow A_n e^{j\varphi_X}.$$

Визначаємо значення коефіцієнт передачі на окремих частотах

$$K(n\Omega) \cdot \cos(n\Omega t + \varphi_K(n\Omega)) \rightarrow K(n\Omega) e^{j\varphi_K(n\Omega)}.$$

При цьому модулі комплексних чисел перемножуються, а аргументи додаються

$$x_{BIX}(t) = A_0 K_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n K(n\Omega) \cos(n\Omega t + \varphi_X + \varphi_K(n\Omega)).$$

Для того, щоб вхідний сигнал не був спотворений необхідно, щоб комплексні амплітуди всіх гармонійних складових на вході множились на одне й те саме число.

Основні етапи:

- 1) переходимо у частотну область $x_{BX}(t) \rightarrow S_{BX}(\omega)$;
- 2) визначаємо вихідну частотну функцію $S_{ВИХ}(\omega) = S_{BX}(\omega) \cdot K(\omega)$;
- 3) переходимо у часову область $S_{ВИХ}(\omega) \rightarrow x_{ВИХ}(t)$.
- 4) Розглянемо розрахунок схемних функцій у простому колі.

Коефіцієнти передачі за напругою (рис.

1.2 а)

$$K_U = \frac{U_{ВИХ}}{U_{ВХ}} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{Y_1}{Y_1 + Y_2}.$$

Коефіцієнти передачі за струмом

(рис.1.2 б)

$$K_I = \frac{I_{ВИХ}}{I_{ВХ}} = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} = \frac{Y_2}{Y_1 + Y_2}.$$

Таким чином, для кіл із індуктивностями простіше шукати коефіцієнт передачі через опори, а для кіл із ємностями простіше шукати коефіцієнт передачі за провідностями.

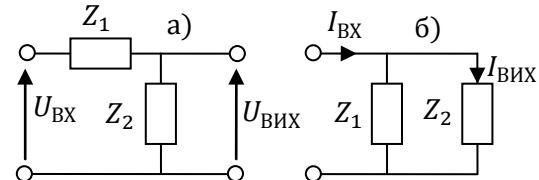


Рисунок 1.2

1.2. Спектральний аналіз періодичних негармонічних сигналів

Періодичний сигнал (рис. 1.3) на будь-якому скінченному інтервалі має кінцеве число розривів першого роду та кінцеве число максимумів та мінімумів, може бути розкладений у ряд Фур'є

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^k a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t), \quad (1.1)$$

де

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt,$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega t) dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega t) dt.$$

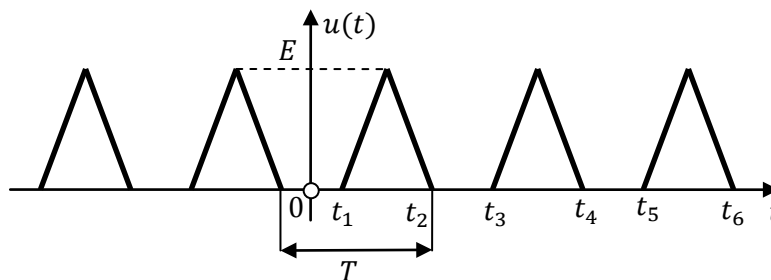


Рисунок 1.3

Отже, у загальному випадку періодичний сигнал містить незалежну від часу постійну складову a_0 та нескінченний набір гармонічних коливань, так званих гармонік із частотами $\omega_n = n\omega_1$, де n – додатне ціле число.

Кожну гармоніку можна описати амплітудою та її початковою фазою. У цьому випадку ряд Фур'є потрібно записати у вигляді, що є зручним для кількісної оцінки процентного вмісту кожної гармоніки.

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^k A_n \cos(n\omega t + \varphi_n), \quad (1.2)$$

де

$$A_0 = \frac{a_0}{2}, A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \varphi_n = -\arctg\left(\frac{b_n}{a_n}\right).$$

Кут φ_n знаходиться із урахуванням знаків коефіцієнтів a_n та b_n . Перший член ряду A_0 називають постійною складовою чи нульовою гармонікою, другий член $A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$ – основна гармоніка чи перша гармоніка, а всі інші носять назву вищої гармоніки. Всі старші гармоніки мають частоти, що є кратними основній гармоніці. Різниця між двома сусідніми гармонічними складовими по частоті становить ω .

Для зручності математичних операцій ряд Фур'є представляють у комплексній (показниковій) формі

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{C}_n e^{jn\omega t}, \quad (1.3)$$

де

$$\dot{C}_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jn\omega t} dt.$$

Із комплексної форми подання рядів Фур'є можна перейти до тригонометричної та навпаки, скориставшись формулами Ейлера

$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}, \quad e^{\pm jx} = \cos(x) \pm j\sin(x).$$

Частота першої гармоніки залежить від періоду $T = 2\pi/\omega_1$. Із формули видно, що зі зростанням періоду T частота першої (основної) гармоніки ω_1 зменшується. Відстань між двома сусідніми гармоніками теж дорівнює ω_1 , тому із збільшенням періоду відстань між двома сусідніми гармоніками зменшується. Крім того зменшується і амплітуда гармонік, що видно із виразу для коефіцієнтів C_n . Отже, із збільшенням періоду повторення сигналу густина спектру C_n збільшується.

У комплексній формі подання ряду Фур'є постійну складову одержуємо на нульовій гармоніці, тобто при $n = 0$.

Графічне зображення коефіцієнтів ряду Фур'є для конкретного сигналу називають спектральними діаграмами цього сигналу або спектрограмою. На спектрограмі можна зобразити значення амплітуд гармонік, тобто амплітудно-частотний спектр (АЧС) та значення фаз гармонік, тобто – фазо-частотний спектр (ФЧС).

Отже, спектри періодичних негармонічних імпульсів лінійчаті, тобто дискретні.

Середня потужність за період визначається виразом

$$P_{\text{CP}} = \frac{1}{T} \int_0^T i^2 R dt = \frac{R}{T} \int_0^T \left[I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} I_n \cos(n\omega t) \right]^2 dt.$$

У результаті розкриття такого інтегралу одержуємо такий тип складових

1) сталу складову

$$\frac{1}{T} \int_0^T I_0^2 R dt = \frac{1}{T} I_0^2 RT = I_0^2 R;$$

2) складові на комбінаційних частотах

$$\frac{1}{T} \int_0^T [I_n \cos(n\omega t + \varphi_n) \cdot I_k \cos(k\omega t + \varphi_k)] R dt = 0, \quad \text{коли } n \neq k;$$

3) квадратичні складові

$$\frac{1}{T} \int_0^T [I_n^2 \cos^2(n\omega t + \varphi_n)] R dt = \frac{I_n^2}{2};$$

4) складові із основною частотою

$$\frac{1}{T} \int_0^T [I_0 I_n \cos(n\omega t + \varphi_n)] R dt = 0.$$

Оскільки інтеграл від функції косинуса $\cos x$ у межах, що визначається її періодом, дорівнює нулю, то при інтегруванні наведених складових усі члени із косинусами перетворюються в нуль.

Отже, періодичні негармонічні струм чи напругу можна розкласти у тригонометричний ряд Фур'є, то діюче значення таких величин є рівністю Парселваля

$$F_D = \sqrt{A_0^2 + \sum_{n=1}^k \frac{A_n^2}{2}}.$$

Середня потужність за період дорівнює сумі потужностей спектральних складових у сумі ортогональних гармонічних функцій

$$P_{\text{СЕР}} = i^2 R = (A_0^2 + \sum_{n=1}^k \frac{A_n^2}{2}) R. \quad (1.4)$$

Згідно із цим виразом, активна потужність від взаємодії між собою різних гармонік дорівнює нулю. Крім того, періодичні сигнали однакові за формою, але мають різний зсув відносно початку координат, характеризуються однаковими значеннями середньої потужності.

Середня потужність періодичного сигналу розподіляється за частотним діапазоном (між гармоніками) прямо пропорційно сумі потужностей гармонік.

Сукупність середніх потужностей гармонік періодичного сигналу називають спектром потужності. Така характеристика містить інформацію про енергетичну значущість кожної гармоніки і визначає її внесок у повну потужність сигналу.

Технічно ширина спектру – це діапазон частот, у межах якого зосереджений наперед заданий процент середньої потужності всього сигналу.

Спектрограма (спектральна діаграма) – це графічне зображення коефіцієнтів ряду Фур'є для конкретного сигналу.

На спектрограмі можна зобразити значення амплітуд гармонік, тобто амплітудно-частотний спектр (АЧС) та значення фаз гармонік, тобто – фазо-частотний спектр (ФЧС). Отже, спектри періодичних негармонічних імпульсів лінійчаті, тобто дискретні.

ФСГ періодичної послідовності імпульсів буде лінійчатою функцією і визначатися через коефіцієнти C_n .

Коефіцієнти \dot{C}_n періодичної послідовності прямокутних імпульсів напруги із амплітудою E_m , тривалістю τ та періодом слідування T (рис. 1.4)

$$C_n = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) e^{-jn\omega t} dt = \frac{E_m}{n\pi} \sin(n\omega \frac{\tau}{2}).$$

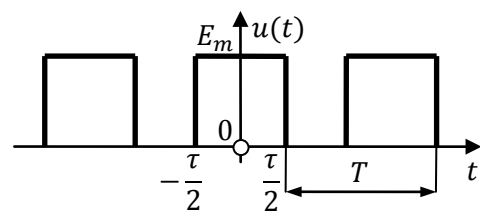


Рисунок 1.4

Спектрограми АЧС (рис. 1.5 а) та ФЧС (рис. 1.5 б) коефіцієнту \dot{C}_n

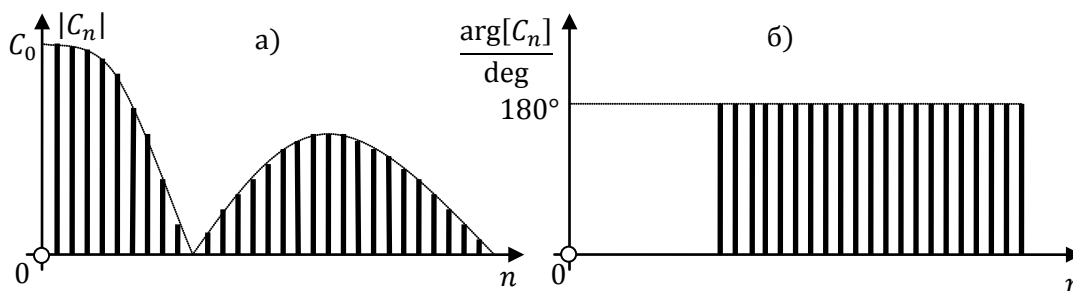


Рисунок 1.5

1.3. Спектральний аналіз неперіодичних гармонічних сигналів

Такі сигнали визначаються парою перетворень Фур'є

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt; \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

По формулі Ейлера перепишемо вираз для зворотного перетворення Фур'є

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) \cos(\omega t) d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) \sin(\omega t) d\omega = f_1(t) + j f_2(t).$$

Пряме перетворення Фур'є

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(\omega t)dt + j \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(\omega t)dt = S_1(\omega) + jS_2(\omega).$$

Функція $f(t)$ може бути парною або непарною.

Для парної функції переписемо пару перетворення Фур'є

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega)e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} S(\omega)\cos(\omega t)d\omega = 2f_1(\omega);$$

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt = 2 \int_0^{+\infty} f(t)\cos(\omega t)dt = 2S_1(t).$$

Для непарної функції переписемо пару перетворення Фур'є

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega)e^{j\omega t}d\omega = j \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} S(\omega)\sin(\omega t)d\omega = j2f_2(\omega).$$

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt = 2j \int_0^{+\infty} f(t)\sin(\omega t)dt = j2S_2(t).$$

Пряме перетворення Фур'є називають функцією спектральної густини, яку можна представити в алгебраїчній та показниковій формі

$$\dot{S}(\omega) = S_1(\omega) + jS_2(\omega) = \sqrt{S_1(\omega)^2 + S_2(\omega)^2} e^{j\arctg(S_2(\omega)/S_1(\omega))} = |S(\omega)|e^{j\varphi(\omega)}.$$

Функції спектральної густини елементарних сигналів напруги

ФСГ прямокутного імпульсу напруги (рис. 1.6)

$$S(\omega) = E\tau \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right).$$

Значення ФСГ на нульовій частоті

$$S(\omega = 0) = E \cdot \tau.$$

Площа, що обмежена напругою $u(t)$

$$S_{\text{пл}} = E \cdot \tau.$$

Отже, $S(0) = S_{\text{пл}}$.

Графіки ФСГ $S(\omega)$, її модуля $|S(\omega)|$ (рис. 1.7 а) та аргумента (рис. 1.7 б).

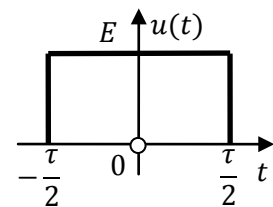


Рисунок 1.6

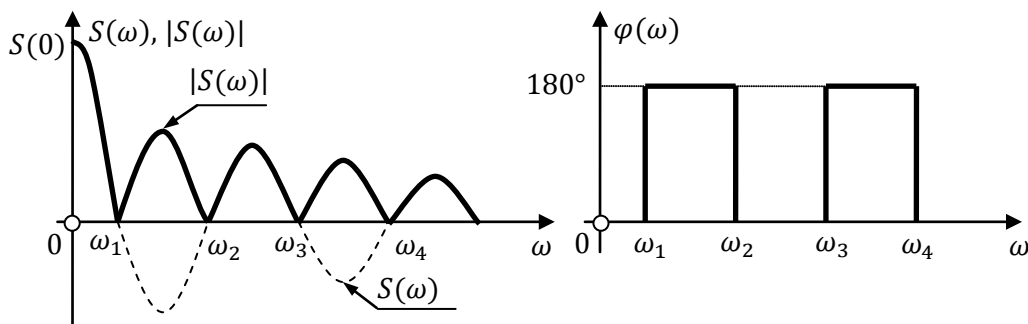


Рисунок 1.7

ФСГ трикутного імпульсу напруги (рис. 1.8)

$$S(\omega) = \frac{E\tau}{2} \text{sinc}^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right).$$

Значення ФСГ на нульовій частоті

$$S(\omega = 0) = 0.5E \cdot \tau.$$

Площа, що обмежена напругою $u(t)$

$$S_{\text{пл}} = 0.5E \cdot \tau.$$

Отже, $S(0) = S_{\text{пл}}$.

Графіки ФСГ $S(\omega)$, її модуля $|S(\omega)|$ (рис. 1.9 а) та аргумента (рис. 1.9 б).

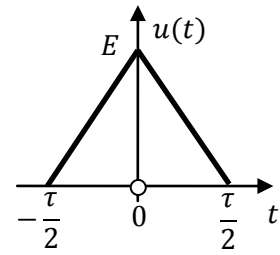


Рисунок 1.8

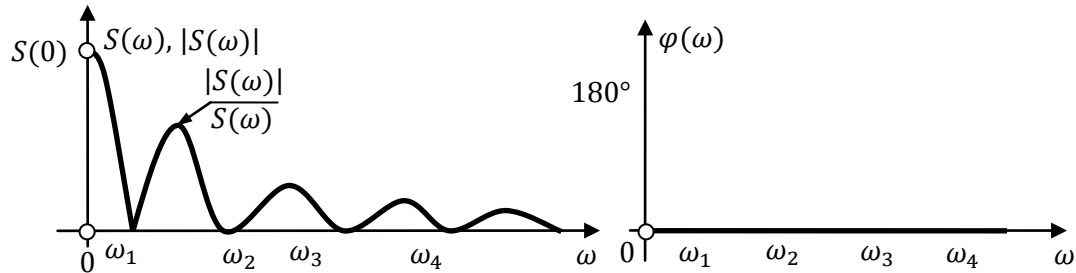


Рисунок 1.9

Розмірність функції спектральної густини визначається із виразу, який пов'язує коефіцієнти C_n періодичної послідовності імпульсів (рис. 1.10 б) та спектральну густину також одиничного імпульсу (рис. 1.10 а)

$$C_n = \frac{1}{T} S(n\omega). \quad (3.5)$$

Звідси визначимо ФСГ

$$S(n\omega) = TC_n = \frac{C_n}{F}.$$

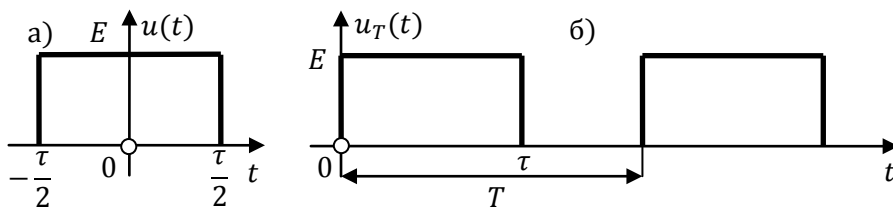


Рисунок 1.10

Отже, фізичний зміст спектральної густини – це питома амплітуда віднесена до частоти, а розмірність спектральної густини: В/Гц, А/Гц. Дійсна частина та АЧС спектральної густини є парна функція. Уявна частина та фаза спектральної густини функція непарна. Спектральна густина на нульовій частоті дорівнює площі під кривою.

Обвідна дискретного амплітудного спектру періодичного імпульсного сигналу із точністю до коефіцієнту $1/T$ співпадає із неперервним амплітудним спектром одиничного імпульсу. Обвідна дискретного фазового спектра періодичного імпульсного сигналу співпадає із неперервним фазовим спектром одиничного імпульсу.

Енергія для неперіодичного сигналу

$$W = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega.$$

Отже,

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt. \quad (1.5)$$

Вираз 1.5 є теорема Релея, що встановлює зв'язок між енергією неперіодичного сигналу та його спектром.

У відповідності із цією теоремою можна кожній ділянці амплітудного спектра неперіодичного сигналу приписати густину енергії пропорційну $|F(\omega)|^2$. Відповідно, за виглядом функції $|F(\omega)|$, можна побачити розподіл енергії у спектрі неперіодичного сигналу. Наприклад, у випадку одиничного прямокутного імпульсу біля 90% повної енергії сигналу зосереджена у смузі частот від 0 до $\omega = 2\pi/t_1$. Чим вужчий прямокутний імпульс, тим ширша смуга, у якій зосереджена основна доля енергії сигналу.

1.4. Властивості перетворення Фур'є

Лінійність сигналів

Якщо є сигнали $f_1(t)$ та $f_2(t)$, що мають відповідні функції спектральної густини $S_1(\omega)$ та $S_2(\omega)$, то

$$f(t) = af_1(t) + bf_2(t) \leftrightarrow S(\omega) = aS_1(\omega) + bS_2(\omega). \quad (1.6)$$

Отже, згідно цієї властивості напругу $u(t)$ можна представити сумою напруги прямокутної та трикутної форми (рис. 1.11)

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t).$$

Тоді ФСГ такої напруги буде визначатися

$$\begin{aligned} S(\omega) &= S_1(\omega) + S_2(\omega) = E_2 \tau_{\text{ПР}} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega \tau_{\text{ПР}}}{2}\right) + S(\omega) = \\ &= \frac{(E_1 - E_2) \tau_{\text{ТР}}}{2} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\omega \tau_{\text{ТР}}}{4}\right). \end{aligned}$$

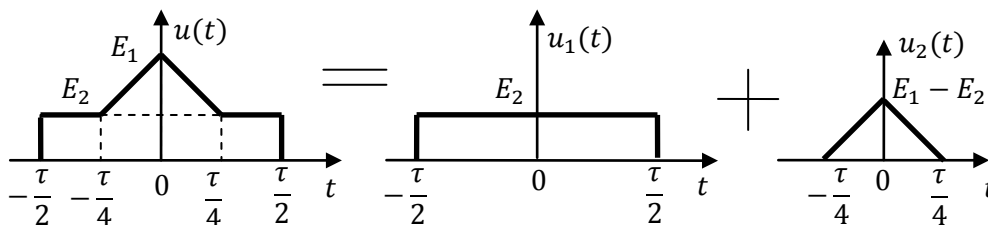


Рисунок 1.11

Диференціювання сигналу при ненульових початкових умовах

$$\frac{df(t)}{dt} \div j\omega S(\omega). \quad (1.7)$$

Інтегрування сигналу

$$\int_0^t f(t)dt \div \frac{S(\omega)}{j\omega}. \quad (1.8)$$

Згідно останніх двох властивостей інтегруючі та диференціюючі кола зображені на рис. 1.12.

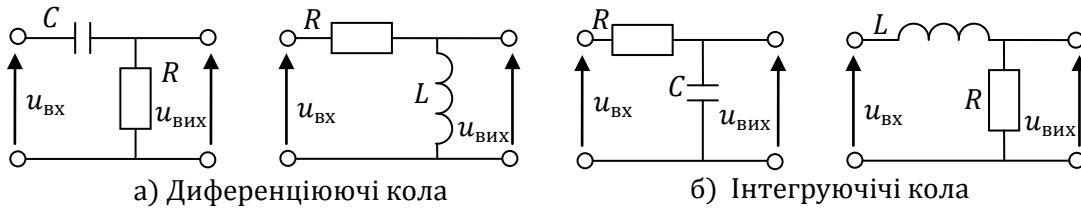


Рисунок 1.12

Зміна масштабу (теорема подоби)

$$f(at) \div \frac{1}{a} S\left(\frac{\omega}{a}\right). \quad (1.9)$$

де a – постійний дійсний коефіцієнт.

Отже, при розтягуванні сигналу струму або напруги (рис. 1.13 а) у часовій області в a разів ($a > 0$), амплітуда ФСГ стискається в a разів, смуга частот звужується в a разів (рис. 1.13 б). При стисненні сигналу струму або напруги за часом в a разів ($a < 0$), його смуга частот розширюється в a разів, а амплітуда ФСГ збільшується в a разів (рис. 1.13 в).

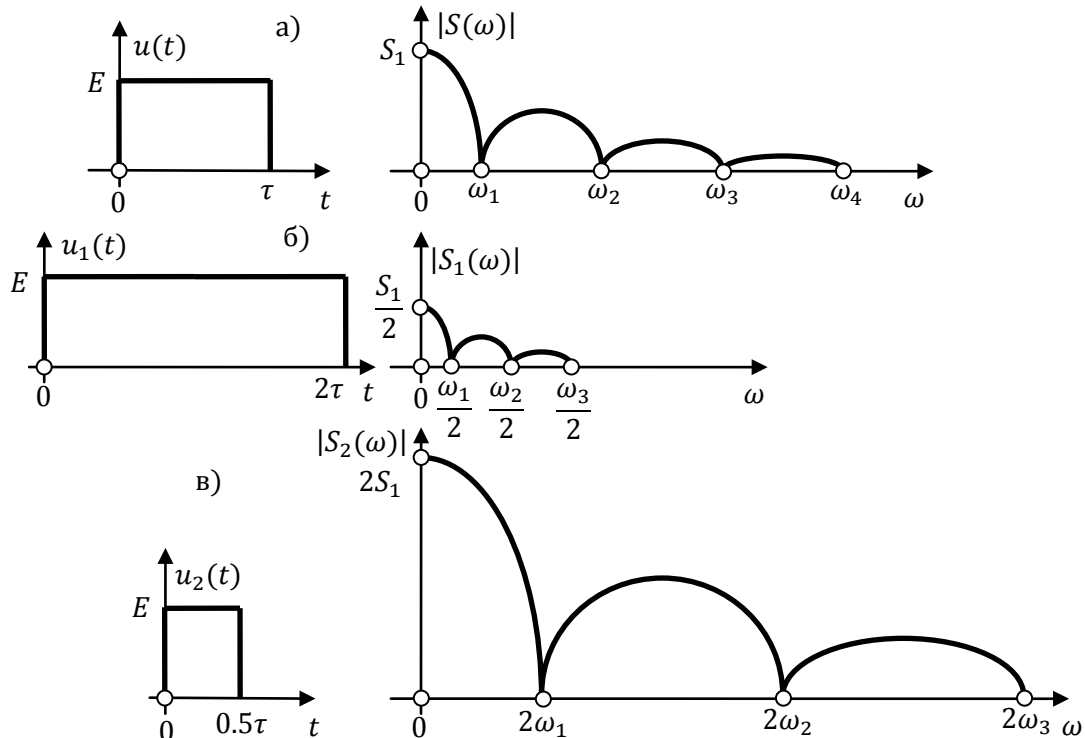


Рисунок 1.13

Зсув у часовій області (теорема запізнення, рис. 1.14)

$$f(t + t_0) \div S(\omega)e^{-j\omega t_0}. \quad (1.10)$$

Отже, що зсув у часі сигналу на величину t_0 призводить лише до зміни фазо-частотної характеристики сигналу на величину $-\omega t_0$. На рис. 1.14 вказані АЧХ та ФЧХ напруг $u_1(t)$ та $u_2(t) = u_1(t - t_0)$ при $t_0 > 0$.

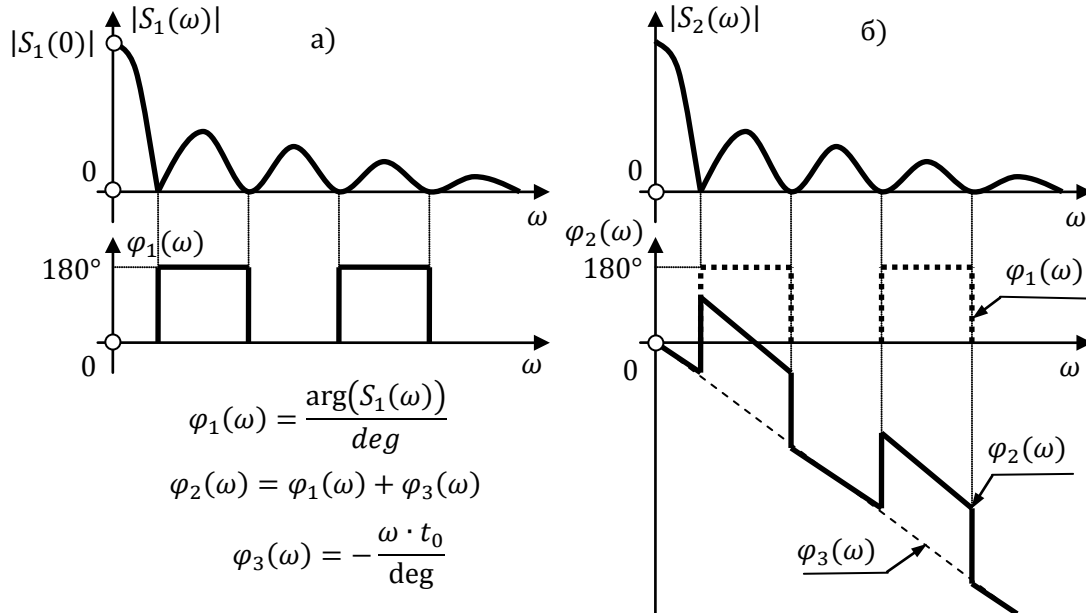


Рисунок 1.14

Зсув у частотній області (теорема зміщення)

$$S(\omega \mp \omega_0) \div f(t)e^{\pm j\omega_0 t}. \quad (1.11)$$

Отже, зсув спектру сигналу у частотній області відповідає множенню сигналу у часовій області на $e^{\pm j\omega_0 t}$ (рис. 1.15).

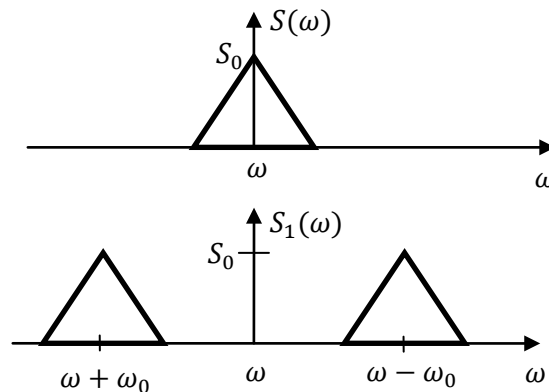


Рисунок 1.15

Добутку двох функцій відповідає згортка їх спектрів

$$\begin{aligned} f_1(t) \cdot f_2(t) &\div \frac{1}{2\pi} S_1(\omega) * S_2(\omega) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty S_1(\Omega) \cdot S_2(\omega - \Omega) d\Omega = \int_0^\infty S_1(\omega - \Omega) \cdot S_2(\Omega) d\Omega. \end{aligned} \quad (1.12)$$

2. ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАНИХ ЗАДАЧ

2.1. Проходження гармонічних періодичних сигналів через лінійні кола

Приклад 2.1. У схемі (рис. 2.1) визначити коефіцієнт передачі за напругою, побудувати його АЧХ та ФЧХ. Знайти вихідну напругу $u_{\text{ВІХ}}(t)$. Вхідна напруга на частоті $\omega = 10^6 \text{ рад/с}$
 $u_{\text{ВІХ}}(t) = 2 + 10 \cos(\omega t + 70^\circ) + 5 \cos(2\omega t - 40^\circ) \text{ В.}$
 Числові значення на схемі: опори в кОм, ємності в нФ.

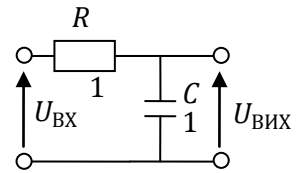


Рисунок 2.1

Розв'язання

Комплексні амплітуди вхідної напруги на частотах 0, $\omega = 1$ та $\omega = 2$ рад/мкс

$$\dot{U}_{\text{ВІХ}}(0) = 2, \quad \dot{U}_{\text{ВІХ}}(1) = 10e^{j70^\circ}; \quad \dot{U}_{\text{ВІХ}}(2) = 5e^{-j40^\circ}.$$

Коефіцієнт передачі за напругою (рис. 2.2)

$$K_U = \frac{u_{\text{ВІХ}}}{u_{\text{ВІХ}}} = \frac{g}{g + pC} = \frac{1}{1 + p} \Big|_{p=j\omega} = \frac{1}{1 + j\omega}.$$

Виділимо модуль та аргумент коефіцієнт передачі за напругою (рис. 2.2)

$$|K_U(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2}}; \quad \varphi_K(\omega) = -\arctg(\omega).$$

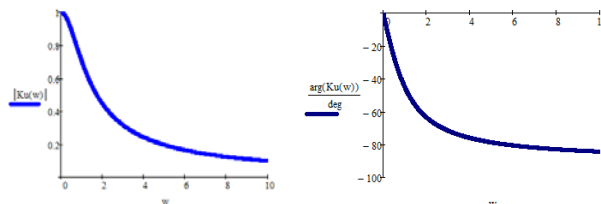


Рисунок 2.2

Значення коефіцієнту передачі на частотах $\omega = 1$ та $\omega = 2$ рад/мкс

$$K_U(\omega = 0) = \frac{1}{1 + j \cdot 0} = \frac{1}{1} = 1; \quad K_U(\omega = 1) = \frac{1}{1 + j} = \frac{1}{\sqrt{2}e^{j45^\circ}} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-j45^\circ};$$

$$K_U(\omega = 2) = \frac{1}{1 + 2j} = \frac{1}{\sqrt{5}e^{j63.4^\circ}} = \frac{1}{\sqrt{5}}e^{-j63.4^\circ}.$$

Комплексні складові вихідної напруги

$$\dot{U}_{\text{ВІХ}}(0) = \dot{U}_{\text{ВІХ}}(0) \cdot K_U(\omega = 0) = 2,$$

$$\dot{U}_{\text{ВІХ}}(1) = \dot{U}_{\text{ВІХ}}(1) \cdot K_U(\omega = 1) = 10e^{j70^\circ} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-j45^\circ} = 5\sqrt{2}e^{j25^\circ};$$

$$\dot{U}_{\text{ВІХ}}(2) = \dot{U}_{\text{ВІХ}}(2) \cdot K_U(\omega = 2) = 5e^{-j40^\circ} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}e^{-j63.5^\circ} = \sqrt{5}e^{-103.5^\circ}.$$

Загальна вихідна напруга у гармонічній формі

$$u_{\text{ВІХ}}(t) = 2 + 5\sqrt{2} \cos(\omega t + 25^\circ) + \sqrt{5} \cos(2\omega t - 103.5^\circ) \text{ В.}$$

Відповідь: $u_{\text{ВІХ}}(t) = 2 + 5\sqrt{2} \cos(\omega t + 25^\circ) + \sqrt{5} \cos(2\omega t - 103.5^\circ) \text{ В.}$

Приклад 2.2. У схемі (рис. 2.3) визначити коефіцієнт передачі за струмом та побудувати його АЧХ та ФЧХ. Числові значення елементів кола наведені на схемі: опори в кОм, ємності в нФ. Знайти струм $i_{\text{ВІХ}}(t)$. Вхідний струм на частоті $\omega = 10^6 \text{ рад/с}$

$$i_{\text{ВІХ}}(t) = 2 + 4 \cos(3\omega t - 5^\circ) + 10 \cos(6\omega t + 23.5^\circ) \text{ мА.}$$

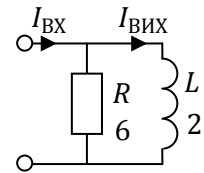


Рисунок 2.3

Розв'язання

Комплексні амплітуди вхідного струму на частотах 0, $\omega = 3$ та $\omega = 6$ рад/мкс

$$I_{\text{ВІХ}}(0) = 10, \quad I_{\text{ВІХ}}(1) = 5e^{j45^\circ}; \quad I_{\text{ВІХ}}(2) = 2e^{j60^\circ}.$$

Коефіцієнт передачі за струмом (рис. 2.3)

$$K_I = \frac{I_{\text{ВІХ}}}{I_{\text{ВІХ}}} = \frac{R}{R + pL} = \frac{6}{6 + 2p} = \frac{3}{3 + p} \Big|_{p=j\omega} = \frac{3}{3 + j\omega}.$$

Модуль та аргумент коефіцієнту передачі за струмом (рис. 2.4)

$$|K_I(\omega)| = \frac{3}{\sqrt{9 + \omega^2}}; \quad \varphi_K(\omega) = -\arctg\left(\frac{\omega}{3}\right).$$

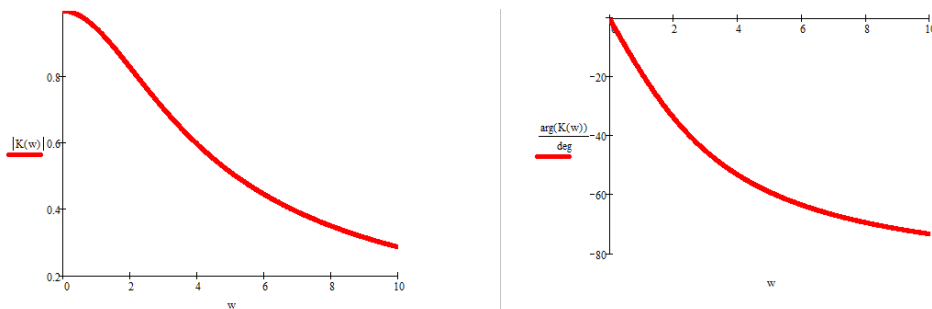


Рисунок 2.4

Значення коефіцієнта передачі на частотах 0, $\omega = 3$ та $\omega = 6$ рад/мкс

$$K_I(\omega = 0) = \frac{3}{3 + j \cdot 0} = \frac{3}{3} = 1; \quad K_U(\omega = 3) = \frac{3}{3 + 3j} = \frac{1}{\sqrt{2}e^{j45^\circ}} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-j45^\circ};$$

$$K_I(\omega = 6) = \frac{3}{3 + 6j} = \frac{1}{1 + 2j} = \frac{1}{\sqrt{5}e^{j63.5^\circ}} = \frac{1}{\sqrt{5}}e^{-j63.5^\circ}.$$

Комплексні складові вихідного струму

$$I_{\text{ВІХ}}(0) = I_{\text{ВІХ}}(0) \cdot K_I(\omega = 0) = 2,$$

$$I_{\text{ВІХ}}(1) = I_{\text{ВІХ}}(3) \cdot K_I(\omega = 3) = 4e^{-j5^\circ} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-j45^\circ} = 2\sqrt{2}e^{-j50^\circ};$$

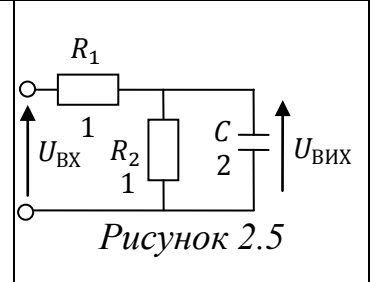
$$I_{\text{ВІХ}}(2) = I_{\text{ВІХ}}(6) \cdot K_I(\omega = 6) = 10e^{j23.5^\circ} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}e^{-j63.5^\circ} = \frac{5}{\sqrt{2}}e^{-j40^\circ}.$$

Загальний вихідний струм у гармонічній формі

$$i_{\text{ВІХ}}(t) = 2 + 2\sqrt{2} \cos(3\omega t - 50^\circ) + 2\sqrt{5} \cos(6\omega t - 40^\circ) \text{ мА.}$$

Відповідь: $i_{\text{ВІХ}}(t) = 2 + 2\sqrt{2} \cos(3\omega t - 50^\circ) + 2\sqrt{5} \cos(6\omega t - 40^\circ) \text{ мА.}$

Приклад 2.3. У схемі (рис. 2.5) визначити коефіцієнт передачі за напругою, побудувати його АЧХ та ФЧХ. Числові значення елементів кола наведені на схемі: опори в кОм, ємності в нФ. Знайти вихідну напругу $u_{ВИХ}(t)$. Вхідна напруга на частоті $\omega = 10^6$ рад/с
 $u_{ВХ}(t) = 4 + 12 \cos(\omega t - 5^\circ) + 10 \cos(2\omega t + 70^\circ)$ В.



Розв'язання

Комплексні амплітуди напруг на частотах 0, $\omega = 1$ та $\omega = 2$ рад/мкс

$$\dot{U}_{ВХ}(0) = 4, \quad \dot{U}_{ВХ}(1) = 12e^{-j5^\circ}; \quad \dot{U}_{ВХ}(2) = 10e^{j70^\circ}.$$

Матриця провідностей

$$Y(p) = \begin{bmatrix} g_1 & -g_1 \\ -g_1 & g_1 + g_2 + pC \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 + 1 + 2p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 + 2p \end{bmatrix}.$$

Коефіцієнт передачі за напругою

$$K_U = \frac{\Delta_{12}}{\Delta_{11}} = \frac{(-1)^{1+2}(-1)}{(-1)^{1+1}(2 + 2p)} = \frac{1}{2 + 2p} = \frac{0.5}{1 + p} \Big|_{p=j\omega} = \frac{0.5}{1 + j\omega}.$$

Модуль та аргумент коефіцієнту передачі за напругою

$$|K_U(\omega)| = \frac{0.5}{\sqrt{1 + \omega^2}}; \quad \varphi_K(\omega) = -\arctg(\omega).$$

Побудуємо модуль та аргумент коефіцієнту передачі за напругою (рис. 2.6).

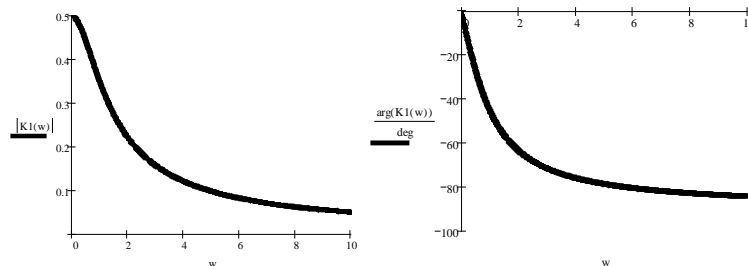


Рисунок 2.6

Значення коефіцієнта передачі на частотах 0, $\omega = 1$ та $\omega = 2$ рад/мкс

$$K_U(\omega = 0) = 0.5;$$

$$K_U(\omega = 1) = \frac{1}{2 + 2j} = \frac{1}{2\sqrt{2}e^{j45^\circ}} = \frac{0.5}{\sqrt{2}}e^{-j45^\circ};$$

$$K_U(\omega = 2) = \frac{1}{2 + 4j} = \frac{1}{2\sqrt{5}e^{j63.5^\circ}} = \frac{0.5}{\sqrt{5}}e^{-j63.5^\circ}.$$

Комплексні складові вихідної напруги

$$\dot{U}_{ВИХ}(0) = \dot{U}_{ВХ}(0) \cdot K_U(\omega = 0) = 2,$$

$$\dot{U}_{ВИХ}(1) = \dot{U}_{ВХ}(1) \cdot K_U(\omega = 1) = 12e^{-j5^\circ} \cdot \frac{0.5}{\sqrt{2}}e^{-j45^\circ} = 3\sqrt{2}e^{-j50^\circ};$$

$$\dot{U}_{ВИХ}(2) = \dot{U}_{ВХ}(2) \cdot K_U(\omega = 2) = 10e^{j70^\circ} \cdot \frac{0.5}{\sqrt{5}}e^{-j63.5^\circ} = \sqrt{5}e^{6.5^\circ}.$$

Загальна вихідна напруга у гармонічній формі

$$u_{ВИХ}(t) = 2 + 3\sqrt{2} \cos(\omega t - 50^\circ) + \sqrt{5} \cos(2\omega t + 6.5^\circ) \text{ В.}$$

Відповідь: $u_{ВИХ}(t) = 2 + 3\sqrt{2} \cos(\omega t - 50^\circ) + \sqrt{5} \cos(2\omega t + 6.5^\circ) \text{ В.}$

Приклад 2.4. У схемі (рис. 2.7) одержати вхідний опір, побудувати його АЧХ та ФЧХ. Знайти струм через ємність $i_C(t)$. Вхідна напруга становить

$$u_{\text{ВХ}}(t) = 7 + 3 \cos(\omega t + 35^\circ) + 6\sqrt{5} \cos(2\omega t + 75^\circ) \text{ В}$$

на частоті $\omega = 10^6 \text{ рад/с}$.

Числові значення елементів кола такі: опори в кОм, ємності в нФ.

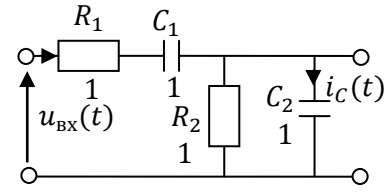


Рисунок 2.7

Розв'язання

Комплексні амплітуди напруг на частотах 0, $\omega = 1$ та $\omega = 2$ рад/мкс

$$\dot{U}_{\text{ВХ}}(0) = 7, \quad \dot{U}_{\text{ВХ}}(1) = 3e^{j35^\circ}; \quad \dot{U}_{\text{ВХ}}(2) = 6\sqrt{5}e^{j75^\circ}.$$

Розрахунки будемо здійснювати в одиницях: опори в кОм, ємності в нФ, напруги в В, струми в мА.

Матриця опорів за МКС

$$Z(p) = \begin{bmatrix} R_1 + R_2 + \frac{1}{pC_1} & -R_2 \\ -R_2 & R_2 + \frac{1}{pC_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 + \frac{1}{p} & -1 \\ -1 & 1 + \frac{1}{p} \end{bmatrix}.$$

Визначник системи

$$\Delta = \left(2 + \frac{1}{p}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{p}\right) - 1 = 2 + \frac{3}{p} + \frac{1}{p^2} = \frac{p^2 + 3p + 1}{p^2}.$$

Вхідний опір кола

$$Z_{\text{ВХ}}(p) = \frac{\Delta}{\Delta_{12}} = \frac{\frac{p^2 + 3p + 1}{p^2}}{\frac{p + 1}{p}} = \frac{p^2 + 3p + 1}{p}$$

Частотні характеристики вхідного опору

$$Z_{\text{ВХ}}(\omega) = \frac{1 - \omega^2 + 3j\omega}{j\omega - \omega^2} = \sqrt{\frac{(1 - \omega^2)^2 + 9\omega^2}{\omega^2 + \omega^4}} e^{j[90^\circ - \arctg(\frac{3\omega}{1 - \omega^2})]}.$$

Модуль та аргумент вхідного опору (рис. 2.8)

$$|Z_{\text{ВХ}}(\omega)| = \sqrt{\frac{(1 - \omega^2)^2 + 9\omega^2}{\omega^2 + \omega^4}}; \quad \varphi_K(\omega) = 90^\circ - \arctg\left(\frac{3\omega}{1 - \omega^2}\right).$$

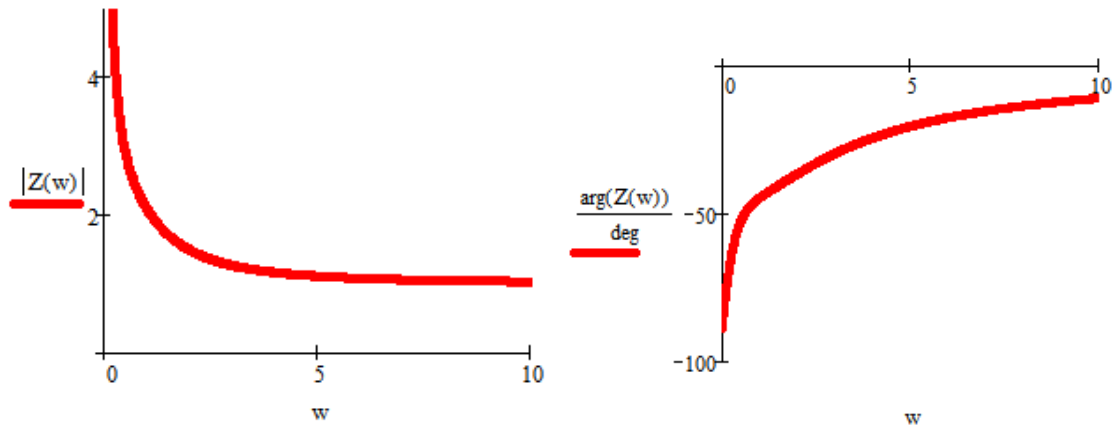


Рисунок 2.8

Вхідний опір на частотах 0, $\omega = 1$ та $\omega = 2$ рад/мкс

$$Z_{BX}(\omega = 0) = \infty;$$

$$Z_{BX}(\omega = 1) = \frac{1 - 1 + 3j}{j - 1} = \frac{3e^{j90^\circ}}{\sqrt{2}e^{j135^\circ}} = \frac{3}{\sqrt{2}}e^{-j45^\circ};$$

$$Z_{BX}(\omega = 2) = \frac{1 - 4 + 6j}{2j - 4} = \frac{-3 + 6j}{-4 + 2j} = \frac{3\sqrt{5}e^{j116.6^\circ}}{2\sqrt{5}e^{j153.4^\circ}} = \frac{3}{2}e^{-j36.8^\circ}.$$

Комплексні складові вихідного струму

$$i_C(0) = \frac{\dot{U}_{BX}(0)}{Z_{BX}(\omega)} = i_{BX}(0) \cdot K_I(\omega = 0) = 2,$$

$$i_C(1) = i_{BX}(3) \cdot K_I(\omega = 3) = 4e^{-j5^\circ} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-j45^\circ} = 2\sqrt{2}e^{-j50^\circ};$$

$$i_C(2) = i_{BX}(6) \cdot K_I(\omega = 6) = 10e^{j23.5^\circ} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}e^{-j63.5^\circ} = \frac{5}{\sqrt{2}}e^{-j39.9^\circ}.$$

За законом Ома струм в ємності: розділивши вирази доданки вхідної напруги на окремій частоті на відповідне значення вхідного опору на цій частоті, а фази на відповідних частотах необхідно відняти

$$i_C(t) = \frac{u_{BX}(t)}{Z_{BX}(\omega)} = \frac{7}{\infty} + \frac{3}{3/\sqrt{2}} \cos(\omega t + 35^\circ + 45^\circ) + \frac{6\sqrt{5}}{3/2} \cos(2\omega t + 75^\circ + 36.8^\circ) = \sqrt{2} \cos(\omega t + 80^\circ) + 4\sqrt{5} \cos(2\omega t + 111.8^\circ).$$

Відповідь: $i_C(t) = \sqrt{2} \cos(\omega t + 80^\circ) + 4\sqrt{5} \cos(2\omega t + 111.8^\circ)$ мА.

2.2. Визначення ФСТГ сигналів напруги та струму

Приклад 2.5. Визначити функцію спектральної густини напруги $u(t)$ (рис. 2.9) амплітудою $E = 2$ В, тривалістю $\tau = 8$ мкс. Побудувати АЧС та ФЧС.

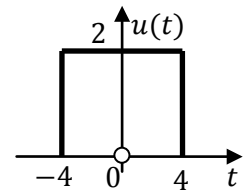


Рисунок 2.9

Розв'язання

Функція спектральної густини через інтеграл Фур'є у комплексній формі

$$S_1(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} E e^{-j\omega t} dt = E \frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \Big|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} = \frac{E}{-j\omega} \left(e^{-\frac{j\omega\tau}{2}} - e^{\frac{j\omega\tau}{2}} \right) =$$

$$= \frac{2E}{\omega} \left(\frac{e^{\frac{j\omega\tau}{2}} - e^{-\frac{j\omega\tau}{2}}}{2j} \right) = \frac{2E}{\omega} \sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) = E\tau \frac{\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\frac{\omega\tau}{2}} = E\tau \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) = 16 \operatorname{sinc}(4\omega).$$

Побудуємо ФСТГ, її модуль та аргумент (рис. 2.10).

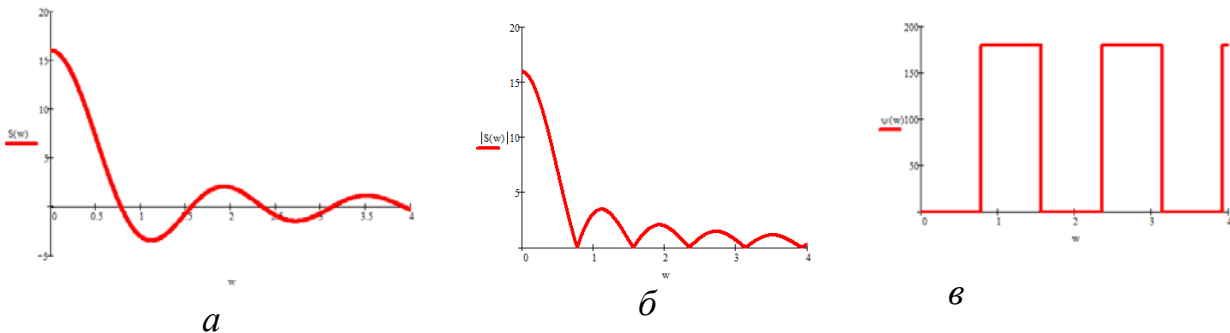


Рисунок 2.10

Функція спектральної густини за допомогою властивості парності функції

$$S_2(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)e^{-j\omega t} dt = 2 \int_0^{\frac{\tau}{2}} E \cos \omega t dt = 2E \frac{\sin \omega t}{\omega} \Big|_0^{\frac{\tau}{2}} = 2E \frac{\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\omega}.$$

Бачимо, ФСТГ $S_1(\omega)$ та $S_2(\omega)$ визначені різними методами співпадають. Значення функції спектральної густини на нульовій частоті

$$S(\omega = 0) = 16.$$

Визначимо площу, що обмежена напругою $u(t)$

$$S_{\text{пл}} = E \cdot \tau = 2 \cdot 8 = 16.$$

Отже, $S(0) = S_{\text{пл}}$.

Відповідь: $S(\omega) = E\tau \operatorname{sinc}(\omega\tau/2) = 16 \operatorname{sinc}(4\omega).$

Приклад 2.6. Визначити функцію спектральної густини напруги $u(t)$ (рис. 2.11) амплітудою $E = 1\text{В}$, тривалістю $\tau = 2\text{ мкс}$. Побудувати АЧС.

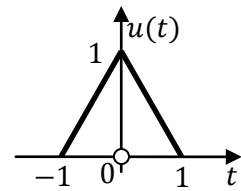


Рисунок 2.11

Розв'язання

Двічі візьмемо похідну напруги $u(t)$. Графіки похідних напруги $u(t)$ розташовані під графіком $u(t)$. Друга похідна є сума трьох δ -імпульсів (рис. 2.12), коефіцієнти при яких дорівнюють скачкам першої похідної $\dot{u}(t)$. Тоді одержуємо

$$\frac{d^2 u(t)}{dt^2} = \frac{2E}{\tau} \cdot \delta\left(t + \frac{\tau}{2}\right) + \frac{2E}{\tau} \cdot \delta\left(t - \frac{\tau}{2}\right) - \frac{4E}{\tau} \delta(t).$$

З огляду на, що

$$\frac{d^2 u(t)}{dt^2} \leftrightarrow (j\omega)^2 S(\omega)$$

за перетворенням Фур'є, то праву частину одержуємо тоді у вигляді

$$(j\omega)^2 S(\omega) = \frac{2E}{\tau} e^{j\omega\tau/2} + \frac{2E}{\tau} e^{-j\omega\tau/2} - \frac{4E}{\tau}.$$

Звідси знайдемо ФСГ

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \frac{E}{-\omega^2} \left(\frac{2}{\tau} e^{j\frac{\omega\tau}{2}} + \frac{2}{\tau} e^{-j\frac{\omega\tau}{2}} - \frac{4}{\tau} \right) = \frac{2E}{-\omega^2 \tau} \left(e^{j\frac{\omega\tau}{2}} + e^{-j\frac{\omega\tau}{2}} - 2 \right) = \\ &= \frac{2E}{-\omega^2 \tau} \left(2 \frac{e^{j\frac{\omega\tau}{2}} + e^{-j\frac{\omega\tau}{2}}}{2} - 2 \right) = \frac{2E}{-\omega^2 \tau} \left(2 \cos\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) - 2 \right) = \frac{4E}{\omega^2 \tau} \left(1 - \cos\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \right) \\ &= \frac{8E}{\omega^2 \tau} \sin^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right) = \frac{\tau}{2} \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)}{\omega^2 \tau^2 / 4} = \frac{E\tau}{2} \text{sinc}^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right) = \text{sinc}^2\left(\frac{\omega}{2}\right). \end{aligned}$$

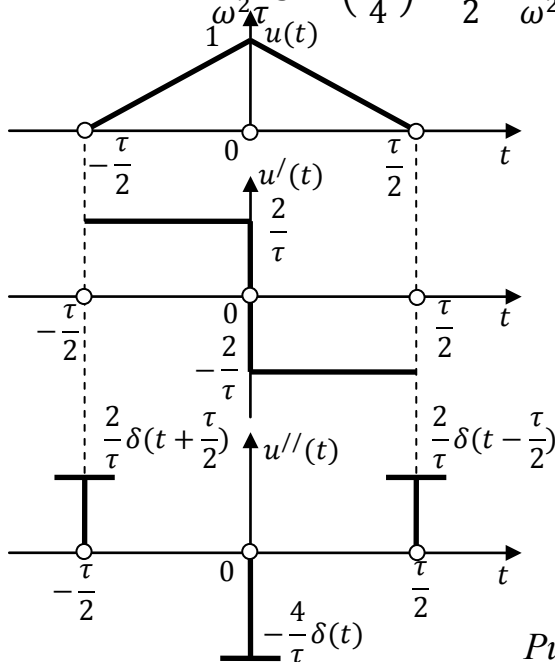
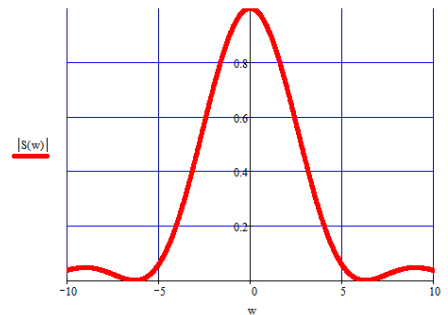


Рисунок 2.12



Відповідь: $S(\omega) = \frac{E\tau}{2} \text{sinc}^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right) = \text{sinc}^2\left(\frac{\omega}{2}\right).$

Приклад 2.7. Визначити функцію спектральної густини напруги $u(t)$ (рис. 2.13) амплітудою $E = 5$ В, тривалістю $\tau = 6$ мкс. Побудувати АЧС та ФЧС.

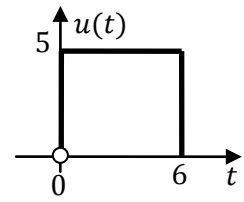


Рисунок 2.13

Розв'язання

Функція спектральної густини напруги $u_1(t)$ центрального прямокутного імпульсу (рис. 2.14)

$$S_1(\omega) = E\tau \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) = 30 \operatorname{sinc}(3\omega).$$

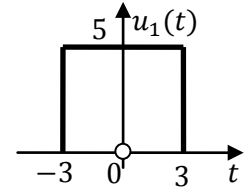


Рисунок 2.14

Функція спектральної густини посунутої напруги $u(t)$ (рис. 2.13) по відношенню до центральної напруги $u_1(t)$ (рис. 2.14) за властивістю зсуву

$$S(\omega) = S_1(\omega)e^{-j\omega\frac{\tau}{2}} = 30 \operatorname{sinc}(3\omega) e^{-j3\omega}.$$

Виділимо модуль АЧС (рис. 2.15 а) та аргумент ФЧС (рис. 2.15 б)

$$|S(\omega)| = |30 \operatorname{sinc}(3\omega)|; \quad \varphi(\omega) = [\arg[S(\omega)] - 3\omega] = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega).$$

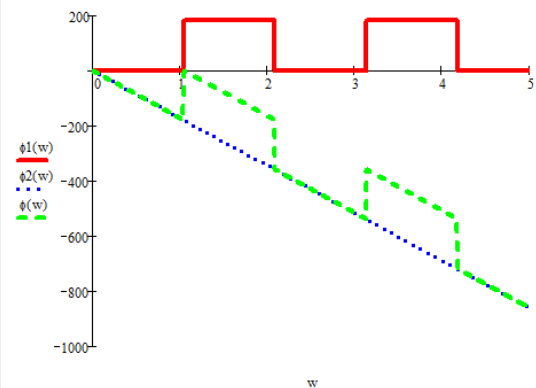
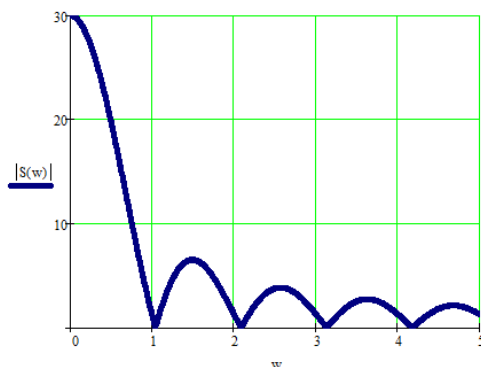


Рисунок 2.15

Таким чином, аргументи $\varphi_1(\omega) = \arg[S(\omega)]$ та $\varphi_2(\omega) = -3\omega$ побудовані в градусах, причому складова $\varphi_1(\omega)$ має висоту 180° , а складова $\varphi_2(\omega)$ має похилу форму і розміщена у від'ємній області та враховує зсув.

Відповідь: $S(\omega) = 30 \operatorname{sinc}(3\omega) e^{-3\omega j}.$

Приклад 2.8. Визначити функцію спектральної густини напруги $u(t)$ із амплітудою $E = 5$ В, $\tau = 4$ мкс (рис. 2.16), побудувати її АЧС та ФЧС для додатних частот.

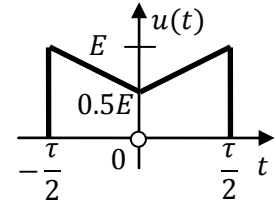


Рисунок 2.16

Розв'язання

Напругу $u(t)$ можна представити у вигляді різниці напруг прямокутної та трикутної форми (рис. 2.17) за теоремою лінійності.

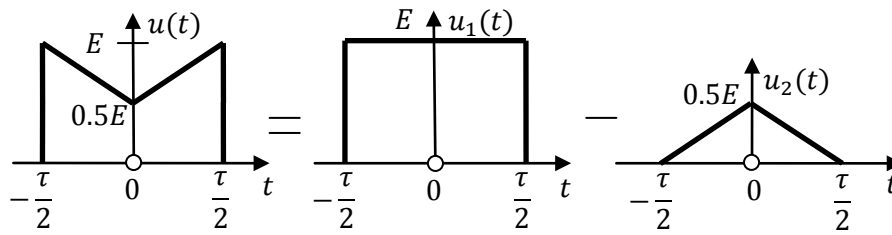


Рисунок 2.17

Функції спектральної густини складових напруг

$$S_1(\omega) = S_{\text{ПР}}(\omega) = E\tau \cdot \text{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) = 20 \cdot \text{sinc}(2\omega);$$

$$S_2(\omega) = S_{\text{ТР}}(\omega) = \frac{E_1\tau}{2} \text{sinc}^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right) = 5\text{sinc}^2(\omega).$$

Загальний функція спектральної густини

$$S(\omega) = S_1(\omega) - S_2(\omega) = 20\text{sinc}(2\omega) - 5\text{sinc}^2(\omega).$$

Функція спектральної густини, її модуль та аргумент в градусах (рис. 2.18) подані нижче.

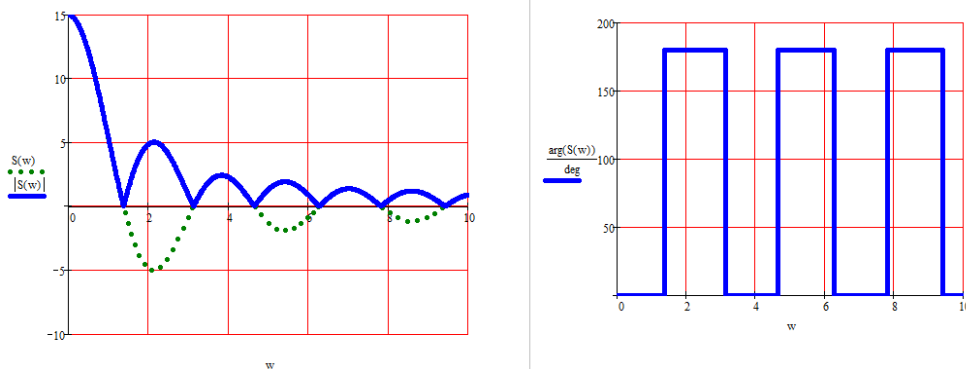


Рисунок 2.18

Значення ФСГ на нульовій частоті $S(0) = 20 - 5 = 15$.

Площа під сигналом

$$S = S_{\text{ПР}} + S_{\text{ТР}} = E \cdot \tau - 0.25E \cdot \tau = 0.75E \cdot \tau = 20 \cdot 0.75 = 15.$$

Відповідь: $S(\omega) = 20\text{sinc}(2\omega) - 5\text{sinc}^2(\omega)$, $S(0) = 15$.

Приклад 2.9. Знайти функцію спектральної густини напруги $u(t)$ (рис. 2.19), побудувати її АЧС та ФЧС для додатних частот. Напруга задана в В, струм в мкс.

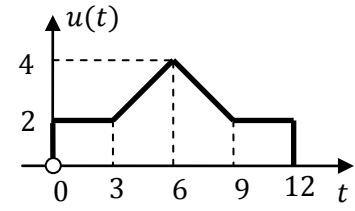


Рисунок 2.19

Розв'язання

Зсунемо напругу $u(t)$ таким чином, щоб вона була симетрична відносно початку координат (рис. 2.20 а)

$$u_1(t) = u(t + 6) \cdot 1(t + 6).$$

Утворену напругу $u_1(t)$ представимо сумою напруги прямокутної та трикутної форми (рис. 2.20).

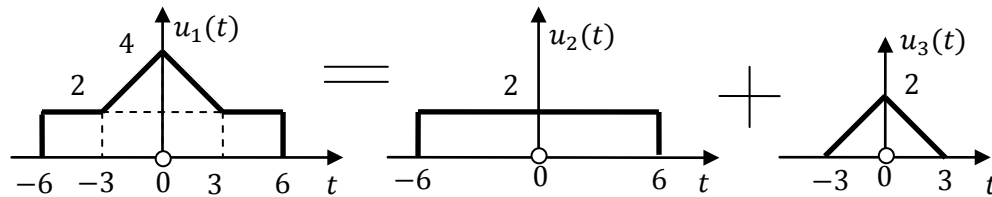


Рисунок 2.20

За теоремою лінійності розкладемо напругу на дві напруги трикутної та прямокутної форми (рис. 2.20).

$$u_1(t) = u_2(t) + u_3(t).$$

Спектри цих напруг

$$\dot{S}_2(\omega) = E_2 \tau_2 \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega \tau_2}{2}\right) = 2 \cdot 12 \operatorname{sinc}\left(\frac{12\omega}{2}\right) = 24 \operatorname{sinc}(6\omega);$$

$$\dot{S}_3(\omega) = \frac{E_3 \tau_3}{2} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\omega \tau_3}{4}\right) = \frac{2 \cdot 6}{2} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{6\omega}{4}\right) = 6 \operatorname{sinc}^2(1.5\omega).$$

Спектр напруги $u_1(t)$ за теоремою лінійності

$$\dot{S}_1(\omega) = \dot{S}_2(\omega) + \dot{S}_3(\omega) = 6 \operatorname{sinc}^2(1.5\omega) + 24 \operatorname{sinc}(6\omega).$$

Спектр напруги $u(t)$ за теоремою часового зсуву

$$\dot{S}(\omega) = \dot{S}_1(\omega) \cdot e^{-j6\omega} = [6 \operatorname{sinc}^2(1.5\omega) + 24 \operatorname{sinc}(6\omega)] \cdot e^{-j6\omega}.$$

АЧС $|\dot{S}(\omega)| = |6 \operatorname{sinc}^2(1.5\omega) + 24 \operatorname{sinc}(6\omega)|$.

ФЧС $\varphi_S(\omega) = \arg[\dot{S}_1(\omega)] - 6\omega$.

Функція спектральної густини, її модуль та аргумент на рис. 2.21.

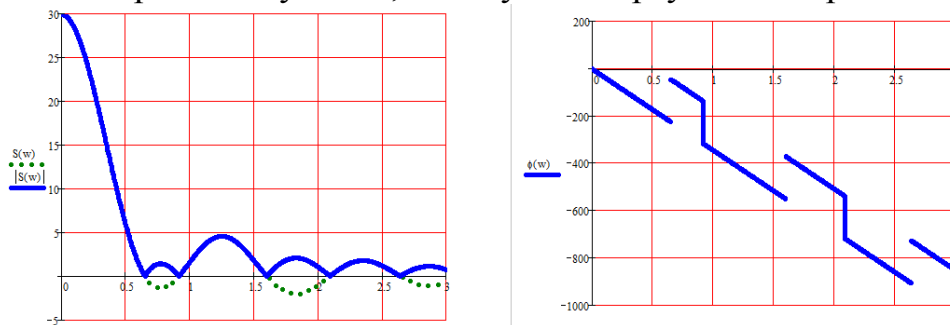


Рисунок 2.21

Скористаємося методом диференціювання. На рис. 2.22 наведена похідна вхідної напруги $u_1(t)$, яка є симетричною відносно початку координат.

Коефіцієнт нахилу прямої ($u_1(t) = kt$)

$$k = \frac{4 - 2}{0 + 3} = \frac{2}{3}.$$

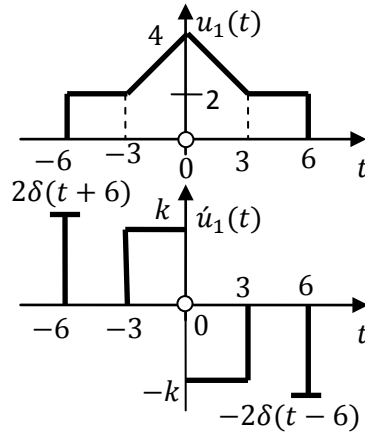


Рисунок 2.22

Похідна напруги (рис. 2.22)

$$\frac{du_1(t)}{dt} = 2\delta(t+6) - 2\delta(t-6) + k[1(t+3) - 1(t)] - k[1(t) - 1(t-3)].$$

За теоремою о диференціюванні у часовій області

$$j\omega \cdot S_1(\omega) = 2 \cdot [e^{j6\omega} - e^{-j6\omega}] + S_{\text{ПР}}(\omega)[e^{j1.5\omega} - e^{-j1.5\omega}].$$

Спектр напруги прямокутної форми

$$S_{\text{ПР}}(\omega) = E\tau \cdot \text{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) = 3k \cdot \text{sinc}\left(\frac{3\omega}{2}\right) = 2\text{sinc}(1.5\omega)$$

Звідси визначимо функцію спектральної густини

$$\begin{aligned} S_1(\omega) &= \frac{4}{\omega} \cdot \frac{e^{j6\omega} - e^{-j6\omega}}{2j} + \frac{4}{\omega} \text{sinc}(1.5\omega) \frac{e^{j1.5\omega} - e^{-j1.5\omega}}{2j} = \\ &= \frac{4}{\omega} \sin(6\omega) + \frac{4}{\omega} \text{sinc}(1.5\omega) \cdot \sin(1.5\omega) = \\ &= 4 \frac{\sin(6\omega)}{6\omega} \cdot 6 + 4 \text{sinc}(1.5\omega) \frac{\sin(1.5\omega)}{1.5\omega} \cdot 1.5 = \\ &= 24 \text{sinc}(6\omega) + 6 \text{sinc}^2(1.5\omega). \end{aligned}$$

Таким чином, обидва методи дали однаковий результат.

Значення ФСГ на нульовій частоті

$$S(0) = 24 + 6 = 30.$$

Площа під сигналом

$$S = S_{\text{ПР}} + S_{\text{ТР}} = E \cdot \tau + 0.25E \cdot \tau = 2 \cdot 12 + 2 \cdot 3 = 30.$$

Відповідь: $S(\omega) = [6 \text{sinc}^2(1.5\omega) + 24 \text{sinc}(6\omega)] \cdot e^{-j6\omega}.$

Приклад 2.10. Визначити функцію спектральної густини напруги $u(t)$ (рис. 2.23), амплітудою $E = 1\text{В}$ та тривалістю $\tau = 2\text{мкс}$, побудувати її АЧС та ФЧС для додатних частот.

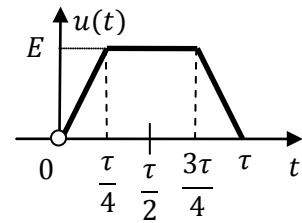


Рисунок 2.23

Розв'язання

Зробимо напругу симетричною відносно початку координат (рис. 2.24) та розглянемо метод розбиття на прості напруги. Для цього вхідну напругу представимо у вигляді різниці двох трикутників

$$u_1(t) = u_2(t) - u_3(t).$$

Рівняння прямої через дві точки

$$\frac{u(t) - E}{0 - E} = \frac{t - \frac{\tau}{4}}{\frac{\tau}{2} - \frac{\tau}{4}} = \frac{t - \frac{\tau}{4}}{\frac{\tau}{4}}.$$

Звідси одержимо

$$u(t) = E - \frac{4E}{\tau} \left(t - \frac{\tau}{4} \right).$$

Точка перетину прямої з віссю

$$u(t = 0) = E - \frac{4E}{\tau} \left(0 - \frac{\tau}{4} \right) = E + E = 2E.$$

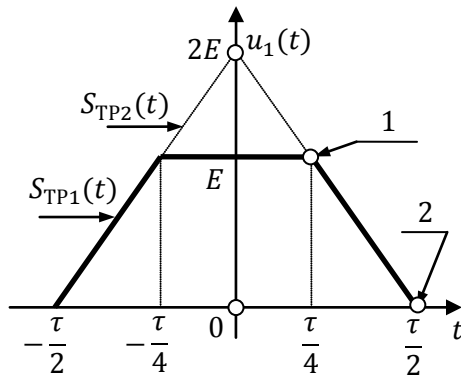


Рисунок 2.24

Функції спектральної густини утворених трикутних імпульсів напруги

$$S_{TP1}(\omega) = \frac{E \cdot \tau}{2} \cdot \text{sinc}^2 \left(\frac{\omega \cdot \tau}{4} \right) = \frac{2E \cdot \tau}{2} \cdot \text{sinc}^2 \left(\frac{\omega \cdot \tau}{4} \right) = E\tau \cdot \text{sinc}^2 \left(\frac{\omega \cdot \tau}{4} \right);$$

$$S_{TP2}(\omega) = \frac{E \cdot \tau}{2} \cdot \text{sinc}^2 \left(\frac{\omega \cdot \tau}{4} \right) = \frac{E \cdot \tau/2}{2} \cdot \text{sinc}^2 \left(\frac{\omega \cdot 0.5\tau}{4} \right) = \frac{E\tau}{4} \cdot \text{sinc}^2 \left(\frac{\omega \cdot \tau}{8} \right).$$

Тоді за властивістю лінійності

$$\begin{aligned} S_1(\omega) &= S_{TP1}(\omega) - S_{TP2}(\omega) = E\tau \cdot \text{sinc}^2 \left(\frac{\omega \cdot \tau}{4} \right) - \frac{E\tau}{4} \cdot \text{sinc}^2 \left(\frac{\omega \cdot \tau}{8} \right) = \\ &= 2\text{sinc}^2 \left(\frac{\omega}{2} \right) - 0.5 \cdot \text{sinc}^2 \left(\frac{\omega}{4} \right) = \frac{8}{\omega^2} \left[\sin^2 \left(\frac{\omega}{2} \right) - \sin^2 \left(\frac{\omega}{4} \right) \right] = \\ &= \frac{8}{\omega^2} \left[\sin \left(\frac{\omega}{2} \right) - \sin \left(\frac{\omega}{4} \right) \right] \cdot \left[\sin \left(\frac{\omega}{2} \right) + \sin \left(\frac{\omega}{4} \right) \right] = \frac{8}{\omega^2} \left[2\sin \left(\frac{\omega}{8} \right) \cos \left(\frac{3\omega}{8} \right) \right] \cdot \left[2\sin \left(\frac{3\omega}{8} \right) \cos \left(\frac{\omega}{8} \right) \right] = \\ &= \frac{8}{\omega^2} \sin \left(\frac{\omega}{4} \right) \cdot \sin \left(\frac{3\omega}{4} \right) = 1.5 \text{sinc} \left(\frac{3\omega}{4} \right) \cdot \text{sinc} \left(\frac{\omega}{4} \right). \end{aligned}$$

На рис. 2.25 а подані графіки ФСГ $S(\omega)$ та модуля ФСГ $|S(\omega)|$, а на рис. 2.25 б – аргумент ФСГ:

$$S(\omega) = S_1(\omega) e^{j[\varphi(\omega)]}; \varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) = \arg[S(\omega)] - \omega.$$

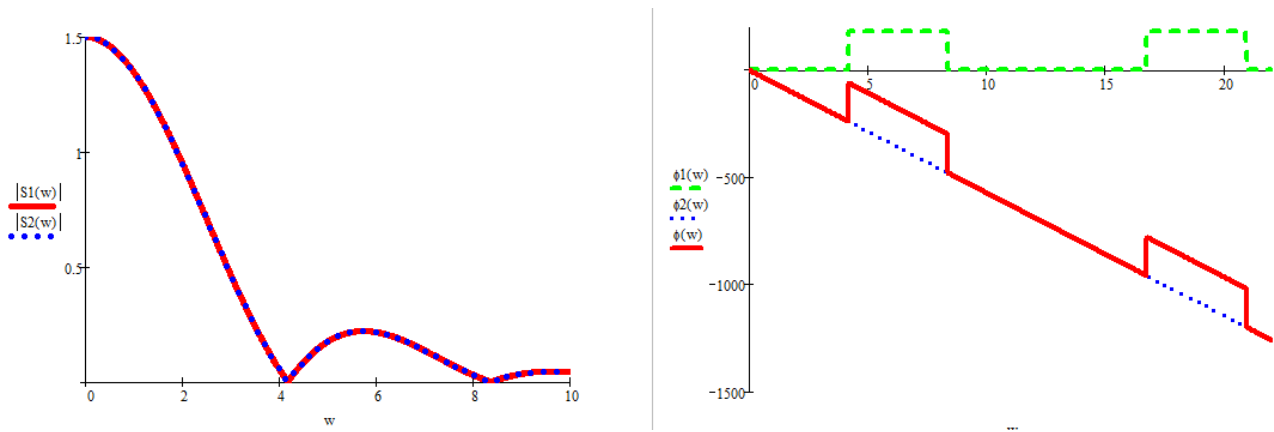


Рисунок 2.25

Розглянемо метод диференціювання. Зробимо напругу симетричною відносно початку координат (рис. 2.26 а). Двічі візьмемо похідну напруги $u(t)$. Графіки похідних напруги $u'(t)$ і $u''(t)$ розташовані під графіком $u(t)$ (рис. 3.26). Тоді одержуємо

$$\frac{du^2(t)}{dt^2} = \frac{4E}{\tau} \delta\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - \frac{4E}{\tau} \delta\left(t + \frac{\tau}{4}\right) - \frac{4E}{\tau} \delta\left(t - \frac{\tau}{4}\right) + \frac{4E}{\tau} \delta\left(t - \frac{\tau}{2}\right).$$

Коефіцієнти нахилу прямих

$$k = \frac{E}{\tau/4} = \frac{4E}{\tau}.$$

За перетворенням Фур'є одержуємо

$$(j\omega)^2 S_2(\omega) = \frac{4E}{\tau} [e^{j\omega\frac{\tau}{2}} + e^{-j\omega\frac{\tau}{2}}] - \frac{4E}{\tau} [e^{j\omega\frac{\tau}{4}} + e^{-j\omega\frac{\tau}{4}}].$$

Звідси знайдемо ФСТГ (рис. 3.24 б,в)

$$\begin{aligned} S_2(\omega) &= \frac{8E}{\omega^2 \tau} \left[\frac{e^{j\omega\frac{\tau}{4}} + e^{-j\omega\frac{\tau}{4}}}{2} - \frac{e^{j\omega\frac{\tau}{2}} + e^{-j\omega\frac{\tau}{2}}}{2} \right] = \frac{8E}{\omega^2 \tau} \left[\cos\left(\frac{\tau\omega}{4}\right) - \cos\left(\frac{\tau\omega}{2}\right) \right] = \\ &= \frac{16E}{\omega^2 \tau} \left[\sin\left(\frac{\frac{\tau\omega}{2} + \frac{\tau\omega}{4}}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\frac{\tau\omega}{2} - \frac{\tau\omega}{4}}{2}\right) \right] = \frac{16E}{\omega^2 \tau} \left[\sin\left(\frac{3\tau\omega}{8}\right) \cdot \sin\left(\frac{\tau\omega}{8}\right) \right] = \\ &= \frac{3E\tau}{4} \operatorname{sinc}\left(\frac{3\tau\omega}{8}\right) \cdot \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{8}\right) = 1.5 \operatorname{sinc}\left(\frac{3\omega}{4}\right) \cdot \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{4}\right). \end{aligned}$$

На рис. 2.26 б розміщені графіки ФСГ та модуля ФСГ, а на рис. 2.26 б поданий аргумент ФСГ.

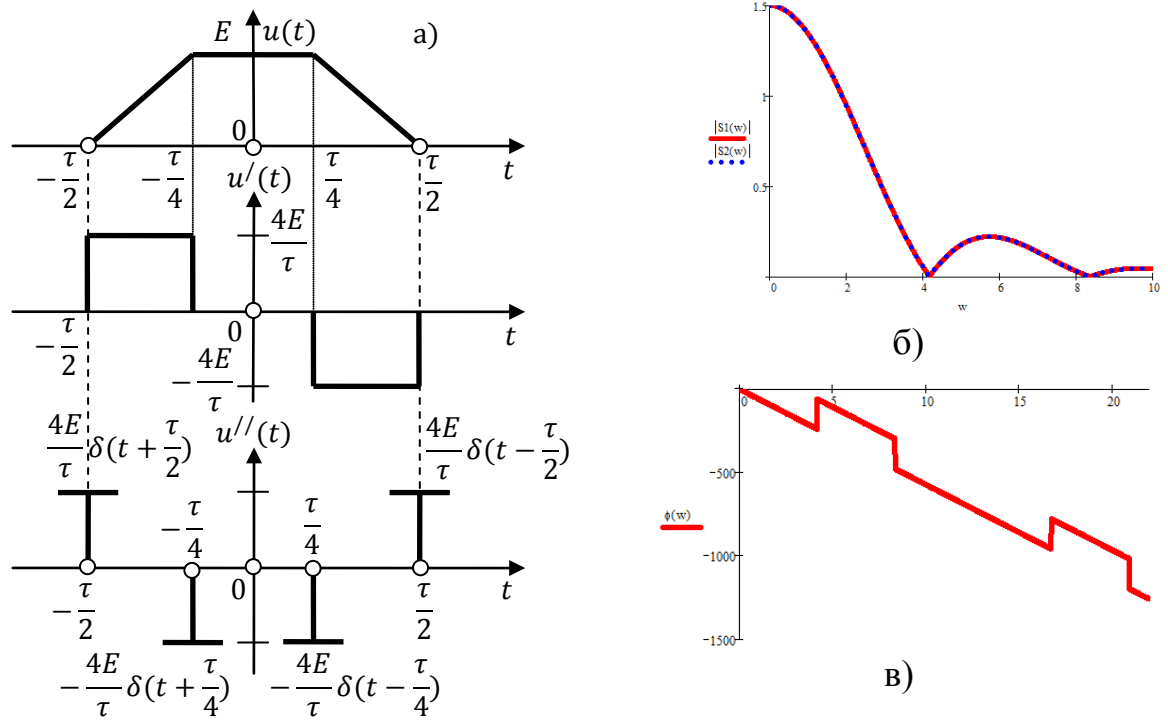


Рисунок 2.26

Бачимо за графіками, що $S_1(\omega) = S_2(\omega) = S(\omega)$ співпадають.

Відповідь: $S(\omega) = \left[1.5 \operatorname{sinc}\left(\frac{3\omega}{4}\right) \cdot \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{4}\right) \right] \cdot e^{-j\omega}.$

Приклад 2.11. Визначити функцію спектральної густини струму $i(t)$ (рис. 2.27). Струм заданий в мА, струм в мкс.

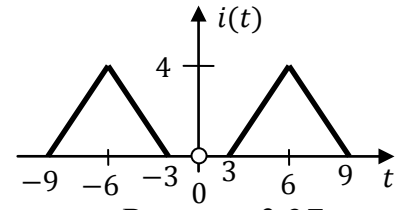


Рисунок 2.27

Розв'язання

Функція спектральної густини симетричного трикутного струму (рис. 2.28)

$$S_1(\omega) = \frac{I \cdot \tau}{2} \text{sinc}^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right) = \frac{4 \cdot 6}{2} \text{sinc}^2\left(\frac{\omega \cdot 6}{4}\right) = 12 \text{sinc}^2(1.5\omega).$$

Спектр першого трикутника, зсунутого вліво відносно початку координат скориставшись теоремою запізнення

$$S_{1mp}(\omega) = S_1(\omega)e^{j6\omega} = 12 \text{sinc}^2(1.5\omega)e^{j6\omega}.$$

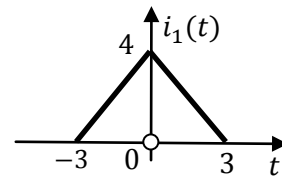
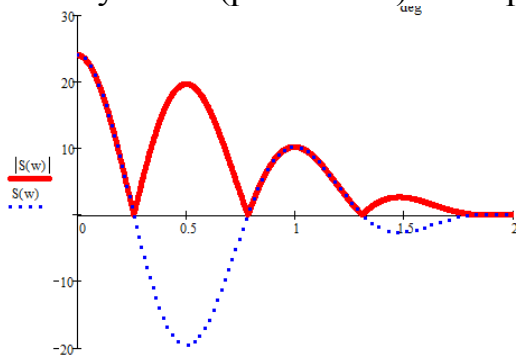


Рисунок 2.28

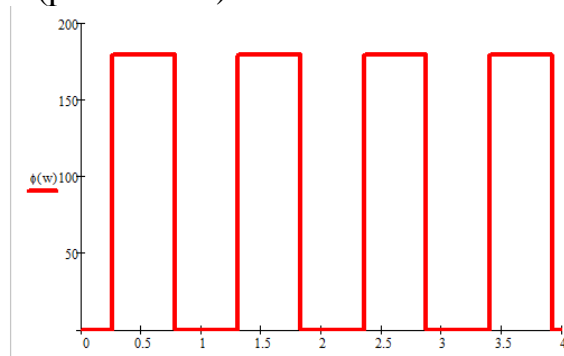
Функція спектральної густини шуканого струму

$$\begin{aligned} S(\omega) &= S(\omega)e^{j6\omega} + S(\omega)e^{-j6\omega} = S(\omega) \cdot [e^{j6\omega} + e^{-j6\omega}] = \\ &= 12 \text{sinc}^2(1.5\omega)(e^{j6\omega} + e^{-j6\omega}) = 24 \text{sinc}^2(1.5\omega) \left(\frac{e^{j6\omega} + e^{-j6\omega}}{2} \right) = \\ &= 24 \text{sinc}^2(1.5\omega) \cdot \cos(6\omega). \end{aligned}$$

Побудуємо функцію спектральної густини (рис. 2.29 а), модуль функції спектральної густини (рис. 2.29 а) та її аргумент (рис. 2.29 б).



а)



б)

Рисунок 2.29

Відповідь: $S(\omega) = 24 \text{sinc}^2(1.5\omega) \cdot \cos(6\omega).$

2.3. Визначення ФСТ напруги та струму на виході схеми

Приклад 2.12. У схемі (рис. 2.30) визначити функцію спектральної густини напруги на виході $u_{\text{ВІХ}}(t)$. Вхідна напруга $u_{\text{ВІХ}}(t)$ подана на рис. 2.1. Числові значення елементів кола наведені на схемі: опори в кОм, ємності в нФ, напруга в В, час в мкс.

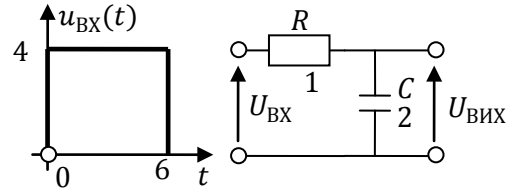


Рисунок 2.30

Розв'язання

Функція спектральної густини вхідної напруги

$$S_{\text{ВІХ}}(\omega) = E \cdot \tau \cdot \text{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \cdot e^{-j2\omega} = 24 \cdot \text{sinc}(3\omega) \cdot e^{-j3\omega}.$$

Виділимо модуль та аргумент $S_{\text{ВІХ}}(\omega)$ (рис. 2.31)

$$|S_{\text{ВІХ}}(\omega)| = 24 \cdot \text{sinc}(3\omega);$$

$$\varphi_{\text{ВІХ}}(\omega) = \varphi_{\text{ВІХ1}}(\omega) + \varphi_{\text{ВІХ2}}(\omega) = \frac{\arg(S_{\text{ВІХ}}(\omega))}{\text{deg}} + \frac{-3\omega}{\text{deg}}.$$

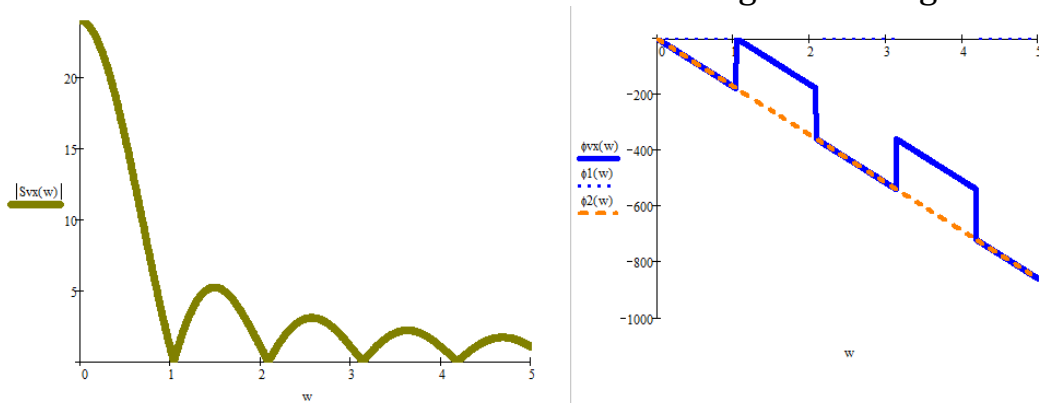


Рисунок 2.31

Коефіцієнт передачі за напругою

$$K_U(\omega) = \frac{u_{\text{ВІХ}}}{u_{\text{ВІХ}}} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega CR} = \frac{1}{1 + j0.25\omega} = \frac{4}{4 + j\omega}.$$

Виділимо модуль та аргумент коефіцієнта передачі за напругою

$$|K_U(\omega)| = \frac{4}{\sqrt{16 + \omega^2}};$$

$$\varphi_{K_U}(\omega) = \frac{\arg(K_U(\omega))}{\text{deg}}.$$

Модуль та аргумент коефіцієнта передачі подані на рис. 2.32.

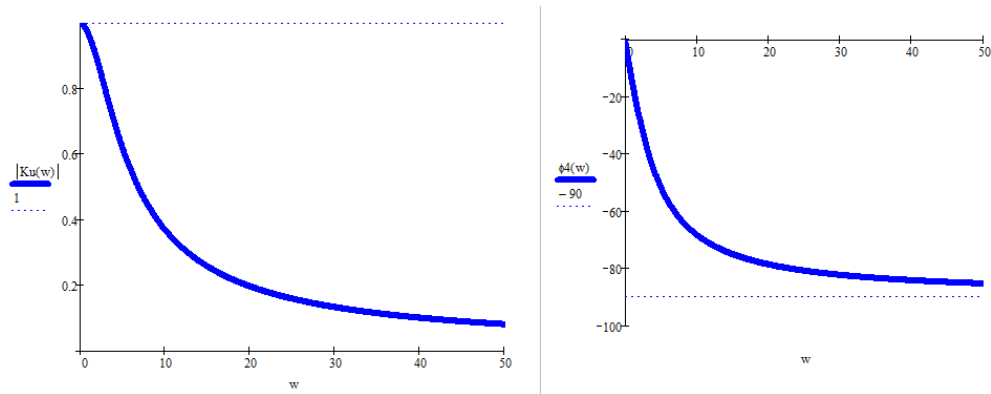


Рисунок 2.32

Функція спектральної густини напруги на виході

$$S_{\text{ВІХ}}(\omega) = S_{\text{ВХ}}(\omega) \cdot K_U(\omega) = 24 \cdot \text{sinc}(3\omega) \cdot e^{-j3\omega} \cdot \frac{4}{4 + j\omega} = \frac{96 \text{sinc}(3\omega)}{4 + j\omega} \cdot e^{-j3\omega}.$$

Виділимо модуль та аргумент (рис. 2.33)

$$|S_{\text{ВІХ}}(\omega)| = |S_{\text{ВХ}}(\omega)| \cdot |K_U(\omega)| = \frac{96 \text{sinc}(3\omega)}{\sqrt{(4)^2 + \omega^2}};$$

$$\varphi_{\text{ВІХ}}(\omega) = \varphi_{\text{ВХ}}(\omega) + \varphi_{K_U}(\omega) = \varphi_{\text{ВХ}}(\omega) + \frac{\arg(K_U(\omega))}{\deg}.$$

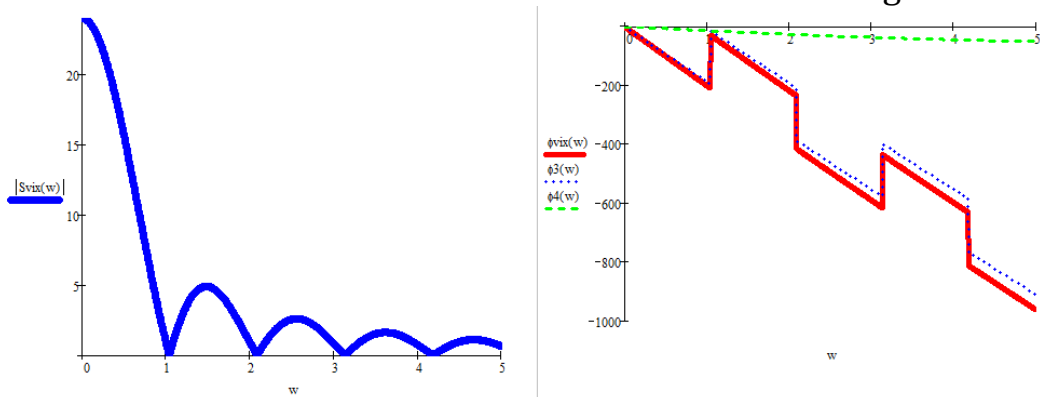


Рисунок 2.33

Відповідь: $S_{\text{ВІХ}}(\omega) = \frac{96 \text{sinc}(3\omega)}{4 + j\omega} \cdot e^{-j3\omega}.$

Приклад 2.13. У схемі (рис. 2.34) одержати вираз функції спектральної густини струму на виході $i_{\text{ВІХ}}(t)$. Вхідний струм $i_{\text{ВІХ}}(t)$ поданий на рис. 2.1. Числові значення елементів кола наведені на схемі: опори в кОм, ємності в нФ, струм в мА, час в мкс.

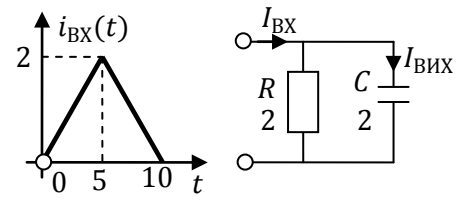


Рисунок 2.34

Розв'язання

Функція спектральної густини вхідного струму

$$S_{\text{ВІХ}}(\omega) = \frac{I_m \cdot \tau}{2} \cdot \text{sinc}^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right) \cdot e^{-j\omega} = 10 \cdot \text{sinc}^2(2.5\omega) \cdot e^{-5j\omega}.$$

Виділимо модуль та аргумент ФСГ (рис. 2.35)

$$|S_{\text{ВІХ}}(\omega)| = 10 \cdot \text{sinc}^2(2.5\omega);$$

$$\varphi_{\text{ВІХ}}(\omega) = \varphi_{\text{ВІХ1}}(\omega) + \varphi_{\text{ВІХ2}}(\omega) = \frac{\arg(S_{\text{ВІХ}}(\omega))}{\deg} + \frac{-5\omega}{\deg}.$$

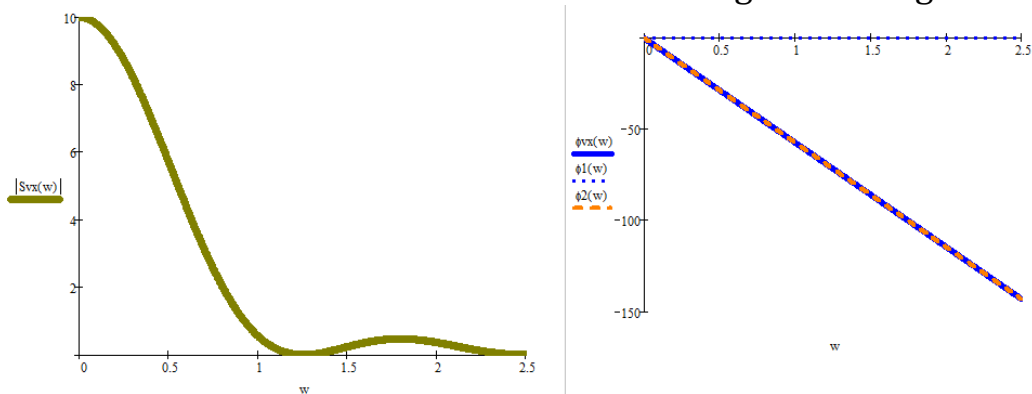


Рисунок 2.35

Коефіцієнт передачі за струмом

$$K_I(\omega) = \frac{I_{\text{ВІХ}}}{I_{\text{ВІХ}}} = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega CR}{1 + j\omega CR} = \frac{j4\omega}{1 + j4\omega} = \frac{j\omega}{0.25 + j\omega}.$$

Виділимо модуль та аргумент коефіцієнта передачі за струмом

$$|K_I(\omega)| = \frac{\omega}{\sqrt{0.25^2 + \omega^2}};$$

$$\varphi_I(\omega) = \frac{\arg(K_I(\omega))}{\deg}.$$

Модуль та аргумент коефіцієнта передачі подані на рис. 2.36.

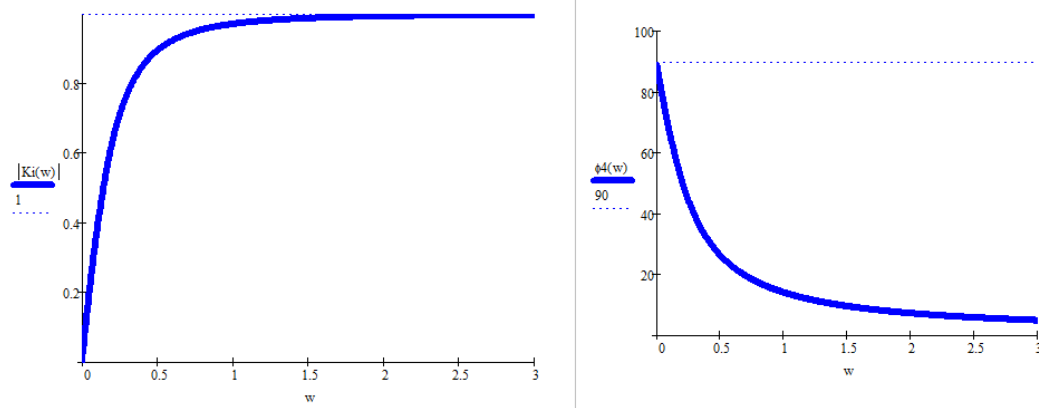


Рисунок 2.36

Функція спектральної густини струму на виході

$$S_{\text{ВІХ}}(\omega) = S_{\text{ВХ}}(\omega) \cdot K_I(\omega) =$$

$$= 10 \text{sinc}^2(2.5\omega) \cdot e^{-j\omega} \cdot \frac{j\omega}{0.25 + j\omega} = \frac{10j\omega \text{sinc}^2(2.5\omega)}{0.25 + j\omega} \cdot e^{-5j\omega}.$$

Виділимо модуль та аргумент (рис. 2.37)

$$|S_{\text{ВІХ}}(\omega)| = |S_{\text{ВХ}}(\omega)| \cdot |K_I(\omega)| = 10 \text{sinc}^2(2.5\omega) \cdot \frac{\omega}{\sqrt{0.25^2 + \omega^2}};$$

$$\varphi_{\text{ВІХ}}(\omega) = \varphi_{\text{ВХ}}(\omega) + \varphi_{K_I}(\omega) = \varphi_{\text{ВХ}}(\omega) + \frac{\arg(K_I(\omega))}{\text{deg}}.$$

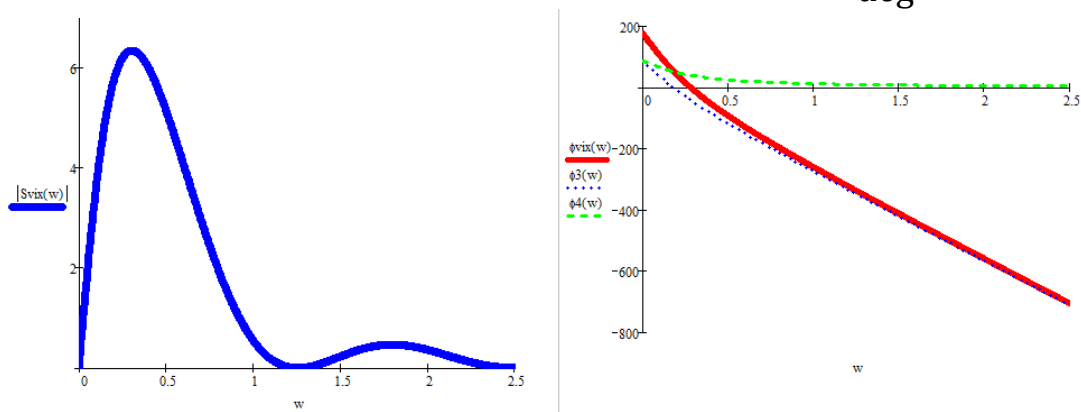


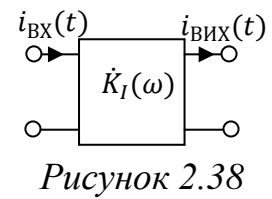
Рисунок 2.37

Відповідь: $S_{\text{ВІХ}}(\omega) = \frac{10j\omega \text{sinc}^2(2.5\omega)}{0.25 + j\omega} \cdot e^{-j5\omega}.$

2.4. Визначення коефіцієнтів передачі

Приклад 2.14. У лінійній схемі (рис. 2.38) визначити вихідний струм $i_{\text{ВІХ}}(t)$ та побудувати його графік. Вхідний струм $i_{\text{ВІХ}}(t) = 4t, t > 0$ мА. Коефіцієнт передачі за струмом кола

$$\dot{K}_I(\omega) = \frac{7e^{-j\frac{\pi}{2}}}{\omega}.$$



Розв'язання

Розглянемо коефіцієнт передачі за струмом

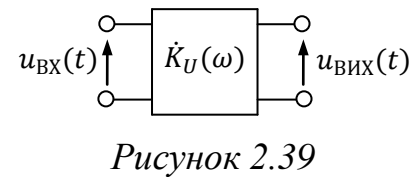
$$\dot{K}_I(\omega) = \frac{7e^{-j\frac{\pi}{2}}}{\omega} = -\frac{7j}{\omega} = \frac{7}{j\omega}.$$

За теоремою інтегрування у часовій області ділення функції у частотній області на $j\omega$ у часовій відповідає інтегрування цієї функції, тому маємо

$$i_{\text{ВІХ}}(t) = 7 \int i_{\text{ВІХ}}(t) dt = 7 \int 4t dt = \frac{28t^2}{2} = 14t^2.$$

Відповідь: $i_{\text{ВІХ}}(t) = 14t^2, t > 0$ мА.

Приклад 2.15. На виході лінійного кола (рис. 2.39) напруга змінюється за законом інтегралу від вхідної напруги, збільшеної у 10 разів. Знайти комплексний коефіцієнт передачі за напругою цього кола на частотах $\omega_1 = 10$ рад/с, $\omega_2 = 100$ рад/с. Відповідь подати у показниковій формі $Ae^{j\varphi}$.



Розв'язання

Оскільки на виході лінійного кола напруга змінюється за законом похідної від вхідної напруги, зменшеної у 100 разів, то запишемо вираз напруги на виході

$$u_{\text{ВІХ}}(t) = 10 \cdot \int u_{\text{ВІХ}}(t) dt.$$

У часовій області це відповідає діленню на $j\omega$ у частотній

$$U_{\text{ВІХ}}(\omega) = \frac{10 \cdot U_{\text{ВІХ}}(\omega)}{j\omega}.$$

Коефіцієнт передачі за напругою

$$K(\omega) = \frac{U_{\text{ВІХ}}(\omega)}{U_{\text{ВІХ}}(\omega)} = \frac{10 \cdot U_{\text{ВІХ}}(\omega)/j\omega}{U_{\text{ВІХ}}(\omega)} = \frac{10}{j\omega}.$$

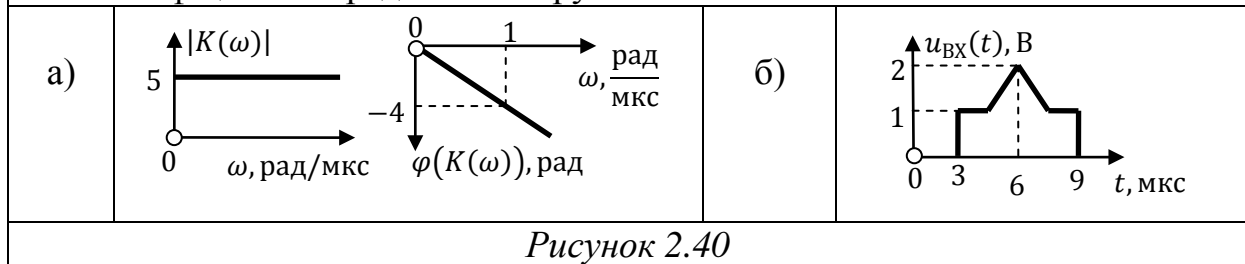
Коефіцієнт передачі на частотах $\omega_1 = 10$ рад/с, $\omega_2 = 100$ рад/с

$$K(\omega = 10) = \frac{10}{10j} = -j = 1e^{-j90^\circ};$$

$$K(\omega = 100) = \frac{10}{100j} = -0.1j = 0.1e^{-j90^\circ}.$$

Відповідь: $K(j\omega) = 10/j\omega$; $K(10) = 1e^{-j90^\circ}$, $K(100) = 0.1e^{-j90^\circ}$.

Приклад 2.16. Зобразити напругу на виході, якщо напруга на вході має вигляд, що зображений на рис. 2.40 б. На рис. 2.40 а зображені АЧХ та ФЧХ коефіцієнта передачі за напругою.



Розв'язання

Виходячи із графіків модуля та аргументу коефіцієнта передачі запишемо аналітичний вираз коефіцієнта передачі

$$K(\omega) = |K(\omega)|e^{-j4\omega} = 5e^{-j4\omega}.$$

Така форма запису означає за теоремою зсуву у частотній області

$$S(\omega \mp \omega_0) \div f(t)e^{\pm j\omega_0 t},$$

що вхідну напругу $u_{BX}(t)$ необхідно помножити амплітуду на 5 та зсунути за віссю часу праворуч на величину 4

$$u_{ВИХ}(t) = 5u_{BX}(t - 4).$$

Зобразимо графік вихідної напруги (рис. 2.41).

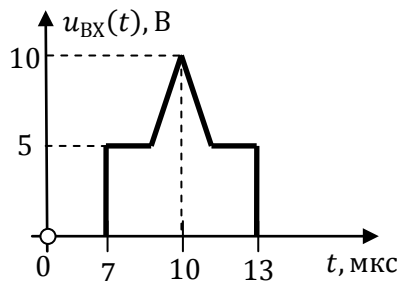


Рисунок 2.41

Відповідь: $u_{ВИХ}(t) = 5u_{BX}(t - 4).$

2.5. Розрахунок сигналів, поданих рядами Фур'є

Приклад 2.17. Знайти діюче значення напруги $u(t)$. Визначити середню потужність за період, що виділяється на опорі 3 кОм, коли до нього прикладена ця напруга.

Напруга $u(t)$ із періодом $T = 2\pi/\omega$ подана усіченим рядом Фур'є
 $u(t) = 2\sqrt{3} + 4 \cos(\omega t + 10^\circ) + 8 \cos(3\omega t - 5^\circ) + 3 \cos(6\omega t + 13^\circ) + 2 \cos(9\omega t + 60^\circ) + 11 \cos(12\omega t + 7^\circ)$ В.

Розв'язання

Діюче значення неперіодичної гармонічної напруги

$$\begin{aligned}
 U_D &= \sqrt{U_0^2 + \sum_{n=1}^k \frac{U_n^2}{2}} = \sqrt{U_0^2 + \sum_{n=1}^6 \frac{U_n^2}{2}} = \\
 &= \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + \frac{4^2}{2} + \frac{8^2}{2} + \frac{3^2}{2} + \frac{2^2}{2} + \frac{11^2}{2}} = \sqrt{12 + \frac{16}{2} + \frac{64}{2} + \frac{9}{2} + \frac{4}{2} + \frac{121}{2}} = \\
 &= \sqrt{12 + 107} = \sqrt{119} \cong 10.9 \text{ В.}
 \end{aligned}$$

Середня потужність за період

$$P_{\text{СЕР}} = \frac{U_D^2}{R} = (U_0^2 + \sum_{n=1}^6 \frac{U_n^2}{2}) / R = (\sqrt{119})^2 / 3 \cong 40 \text{ мВт.}$$

Відповідь: $U_D = 11 \text{ В}$, $P_{\text{СЕР}} = 40 \text{ мВт}$.

Приклад 2.18. Записати ряд Фур'є у комплексному вигляді. Накреслити АЧС та ФЧС спектра струму для додатних та від'ємних частот.

Періодична функція струму $i(t)$ із періодом $T = 2\pi/\omega$ поданий рядом Фур'є $i(t) = 4 + 14 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right) + 4 \cos\left(2\omega t + \frac{\pi}{4}\right) - 6 \cos(4\omega t + \pi)$ мА.

Розв'язання

Скористаємося формулою Ейлера

$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}.$$

Перепишемо вираз струму

$$\begin{aligned} i(\omega) &= 4 + 14 \left(\frac{e^{j(\omega t + \frac{\pi}{3})} + e^{-j(\omega t + \frac{\pi}{3})}}{2} \right) + 4 \left(\frac{e^{j(2\omega t + \frac{\pi}{4})} + e^{-j(2\omega t + \frac{\pi}{4})}}{2} \right) - \\ &\quad - 6 \left(\frac{e^{j(4\omega t + \pi)} + e^{-j(4\omega t + \pi)}}{2} \right) = \\ &= 4 + 7e^{-j\frac{\pi}{3}}e^{-j\omega t} + 2e^{-j\frac{\pi}{4}}e^{-j2\omega t} - 3e^{-j\pi}e^{-j4\omega t} + \\ &\quad + 7e^{j\frac{\pi}{3}}e^{j\omega t} + 2e^{j\frac{\pi}{4}}e^{j2\omega t} - 3e^{j\pi}e^{j4\omega t} = \\ &= 4 + 7e^{-j\frac{\pi}{3}}e^{-j\omega t} + 2e^{-j\frac{\pi}{4}}e^{-j2\omega t} - 3e^{j0}e^{-j4\omega t} + \\ &\quad + 7e^{j\frac{\pi}{3}}e^{j\omega t} + 2e^{j\frac{\pi}{4}}e^{j2\omega t} + 3e^{j2\pi}e^{j4\omega t}. \end{aligned}$$

Побудуємо АЧС (рис. 2.42 а) та ФЧС (рис. 2.42 б) струму.

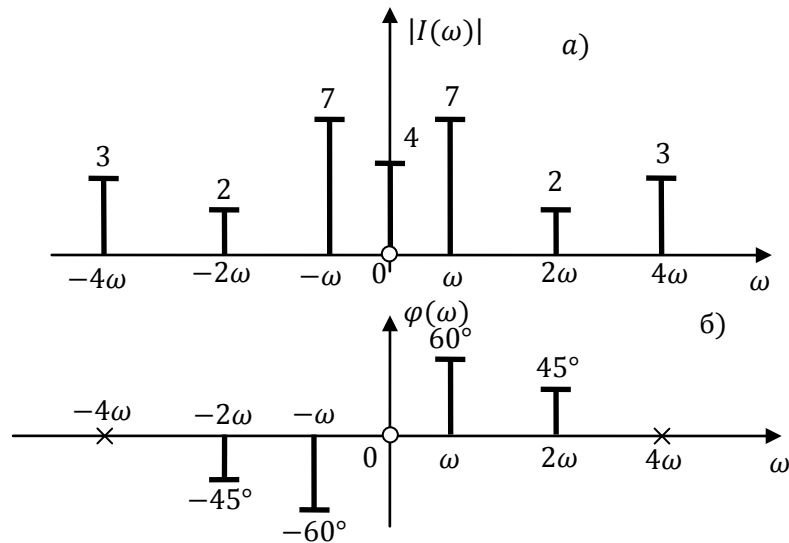


Рисунок 2.42

Відповідь:

$$i(\omega) = 4 + 7e^{-j\frac{\pi}{3}}e^{j\omega t} + 2e^{-j\frac{\pi}{4}}e^{j2\omega t} + 3e^{j0}e^{j4\omega t} + 7e^{j\frac{\pi}{3}}e^{j\omega t} + 2e^{j\frac{\pi}{4}}e^{j2\omega t} + 3e^{j2\pi}e^{j4\omega t}.$$

Приклад 2.19. Знайти комплексну амплітуду четвертої гармоніки, якщо із даного імпульсу струму тривалістю $\tau = 2$ мкс та амплітудою $I_m = 12$ мА зробити періодичний струм із періодом $T = 16$ мкс (рис. 2.43).

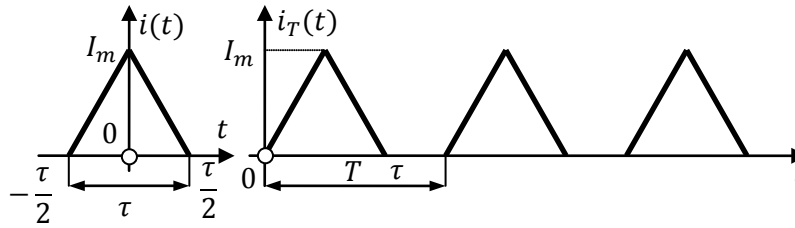


Рисунок 2.43

Розв'язання

ФСГ одиничного рівнобедреного трикутного імпульсу струму (рис. 2.44)

$$\dot{S}(\omega) = \frac{I_m \tau}{2} \text{sinc}^2\left(\frac{\omega \tau}{4}\right).$$

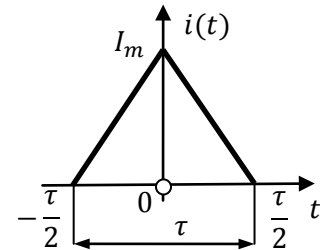


Рисунок 2.44

Вираз, який пов'язує коефіцієнти C_n періодичної послідовності імпульсів та спектральну густину такого ж одиничного імпульсу

$$C_n = \frac{1}{T} S(n\omega) = \frac{1}{T} \frac{I_m \tau}{2} \text{sinc}^2\left(\frac{n\omega \tau}{4}\right).$$

Четверта гармоніка, не зсунутого імпульсу

$$C_4 = \frac{1}{T} \frac{I_m \tau}{2} \text{sinc}^2\left(\frac{4\omega \tau}{4}\right) = \frac{1}{16} \frac{12 \cdot 2}{2} \text{sinc}^2(\omega \cdot 2) = 0.75 \text{sinc}^2(2\omega).$$

Колова частота

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{16} = \frac{\pi}{8}.$$

Тоді четверта гармоніка

$$C_4 = 0.75 \text{sinc}^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{0.75 \sin^2(\frac{\pi}{4})}{\pi^2/16} = \frac{0.75 \cdot 0.5 \cdot 16}{\pi^2} = \frac{6}{\pi^2} \cong 0.608.$$

Зсув трикутного імпульсу напруги відносно початку координат

$$\tau_{зс} = 0.5\tau = 0.5 \cdot 2 = 1 \text{ мкс}.$$

Тепер врахуємо зсув

$$\dot{C}_4 = C_4 \cdot e^{-j\omega \tau_{зс}} = C_4 \cdot e^{-j\frac{\pi}{8}} = 0.608 e^{-j\frac{\pi}{8}}.$$

Відповідь: $\dot{C}_4 = 0.608 e^{-j\frac{\pi}{8}}.$

2.6. Періодична послідовність сигналів

Приклад 2.20. Визначити коефіцієнти \dot{C}_n періодичної послідовності прямокутних імпульсів із амплітудою $E_m = 1\text{В}$, тривалістю $\tau = 10\text{ мкс}$ та періодом слідування $T = 100\text{ мкс}$ (рис. 2.45). Побудувати їх АЧС та ФЧС. Визначити частоти, на яких будуть нулі АЧС. Визначити (аналітично) номер гармоніки, на якій буде перший нуль.

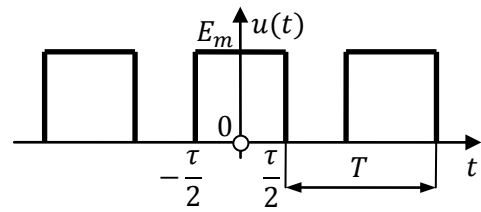


Рисунок 2.45

Розв'язання

Для розрахунку коефіцієнтів C_n послідовності прямокутних імпульсів використаємо комплексну форму Ряду Фур'є

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega t}, \text{ где } \dot{C}_n = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) e^{-jn\omega t} dt.$$

Коефіцієнти C_n із урахуванням того, що функція $f(t)$ є парною

$$C_n = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) e^{-jn\omega t} dt = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) \cos(n\omega t) dt = \frac{2}{T} \int_0^{\tau/2} E_m \cos(n\omega t) dt =$$

$$= \frac{2E_m}{Tn\omega} \sin(n\omega t) \Big|_0^{\tau/2} = \frac{2E_m}{Tn\omega} \sin\left(n\omega \frac{\tau}{2}\right) = \frac{2E_m}{Tn \frac{2\pi}{T}} \sin\left(n\omega \frac{\tau}{2}\right) = \frac{E_m}{n\pi} \sin\left(n\omega \frac{\tau}{2}\right)$$

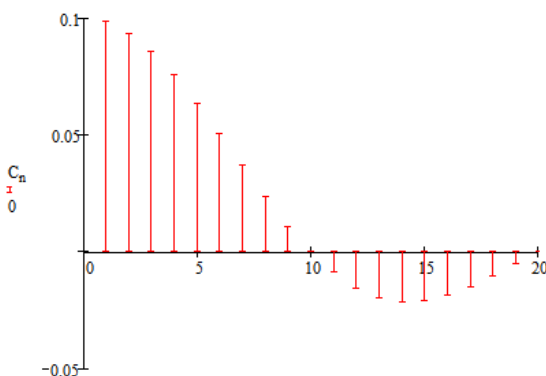
Визначимо частоту через період

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}.$$

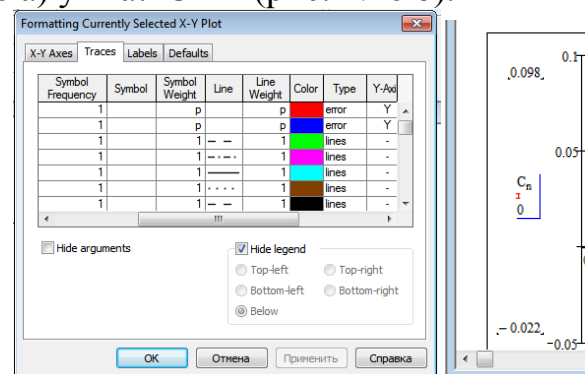
Постійна складова для коефіцієнтів C_n

$$C_0 = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt = \frac{2}{T} \int_0^{\tau/2} E_m dt = \frac{2E_m}{T} t \Big|_0^{\tau/2} = \frac{2E_m \tau}{2T} = \frac{E_m \tau}{T} = \frac{1 \cdot 10}{100} = 0.1.$$

Побудуємо коефіцієнти C_n (рис. 2.46 а) у MathCAD (рис. 2.46 б).



a



6

Рисунок 2.46

Побудуємо АЧС (рис. 2.47 а) та ФЧС (рис. 2.47 б) коефіцієнту \hat{C}_n

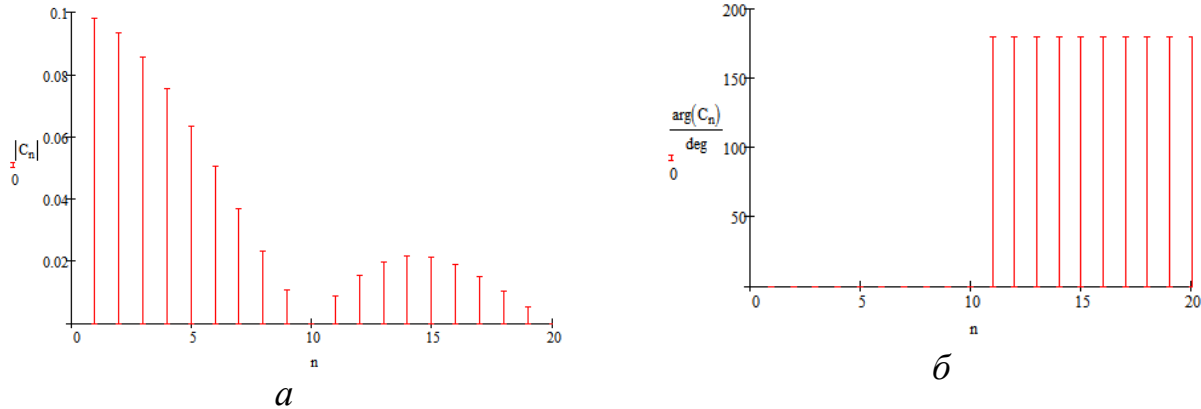


Рисунок 2.47

Оскільки

$$C_n = \frac{2E_m}{n\pi} \sin\left(n\omega \frac{\tau}{2}\right).$$

Визначимо, коли буде перший нуль функції, тобто значення, коли $C_n = 0$. Проаналізувавши вираз, одержуємо, що для цього повинно, щоб

$$\sin\left(n\omega \frac{\tau}{2}\right) = 0.$$

Звідси

$$n\omega \frac{\tau}{2} = \pi k, \quad k - \text{ціле число.}$$

Звідси визначимо та замість ω підставимо її вираз

$$n = k \frac{2\pi}{\omega\tau} = k \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{T}\tau} = k \frac{T}{\tau} = k\theta.$$

Величину $\theta = T/\tau$ називають **шпарованістю**, що вказує відстань між двома сусідніми нулями. Отже, перший нуль буде, кратний величині шпарованості.

Гармоніка на якій буде перший нуль

$$n = k \frac{T}{\tau} = 1 \cdot \frac{100}{10} = 10.$$

Оскільки

$$T = n \frac{\tau}{k}.$$

Частоти, при яких будуть нулі

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\frac{\tau}{k}} = \frac{2\pi k}{\tau}$$

Отже, спектральні складові дорівнюють нулю на частотах

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau}; \frac{4\pi}{\tau}; \frac{6\pi}{\tau}; \dots \frac{2\pi k}{\tau}.$$

Приклад 2.21. Періодична послідовність прямокутних імпульсів напруги (рис. 2.48) задана виразом

$$u(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < t_1, \\ 0, & t_1 < t < 2t_1; \end{cases}$$

Тут період $T = 2t_1$. Знайти аналітичний вираз для коефіцієнтів C_n . Побудувати АЧС та ФЧС для 20-ти гармонік.

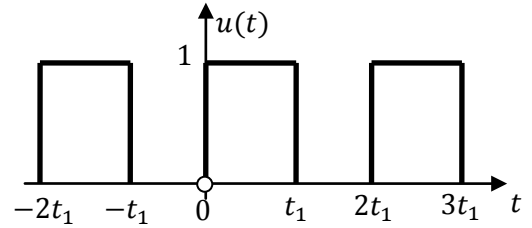


Рисунок 2.48

Розв'язання

Визначимо коефіцієнти C_n періодичної послідовності

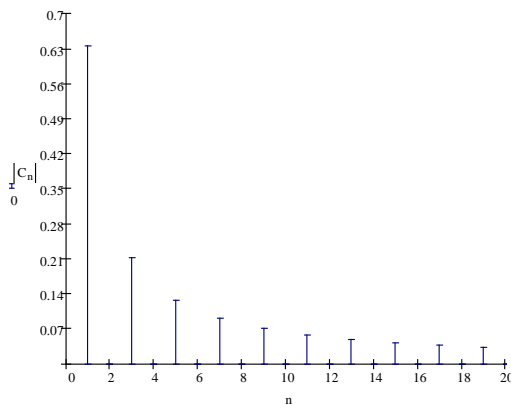
$$\begin{aligned} C_n &= \frac{2}{T} \int_0^T u(t) e^{-jn\omega t} dt = \frac{1}{t_1} \int_0^{t_1} e^{-jn\omega t} dt = \frac{e^{-jn\frac{2\pi}{2t_1}t}}{-jn\frac{2\pi}{2t_1}t_1} \Bigg|_0^{t_1} = \frac{e^{-jn\frac{\pi}{t_1}t}}{-jn} \Bigg|_0^{t_1} = \\ &= \frac{e^{-jn\pi}}{-jn\pi} - \frac{1}{-jn\pi} = \frac{1}{jn\pi} (1 - e^{-jn\pi}). \end{aligned}$$

Проаналізуємо одержаний вираз. Для парних гармонік n доданок $e^{-jn\pi} = 1$, тоді $C_n = 0$. Для непарних гармонік n доданок $e^{-jn\pi} = -1$, тоді $C_n = \frac{2}{jn\pi}$.

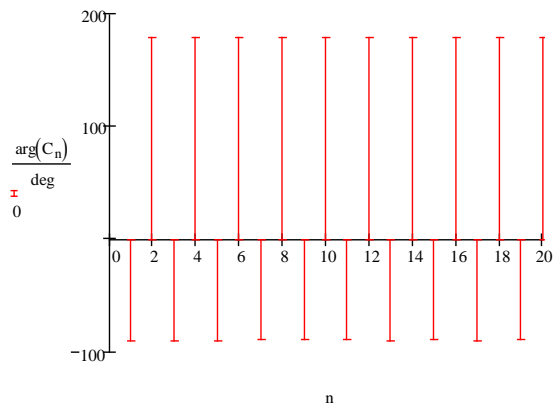
При $n = 0$, визначимо нульову гармоніку (постійну складову)

$$C_0 = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) dt = \frac{2}{2t_1} \int_0^{t_1} 1 dt = \frac{t_1}{t_1} = 1.$$

Побудуємо АЧС коефіцієнта C_n (рис. 2.49 а). Побудуємо ФЧС коефіцієнта C_n (рис. 2.49 б)



а



б

Рисунок 2.49

Відповідь: $\dot{C}_n = \frac{1}{jn\pi} (1 - e^{-jn\pi})$.

Приклад 2.22. Періодична напруга із періодом (рис. 2.50) на відрізку $-T/2 \leq t \leq T/2$ заданий виразом

$$u(t) = \begin{cases} 0.5 \cos(\omega t), & |t| \leq T/4, \\ 0, & T/4 \leq |t| \leq T/2; \end{cases}$$

Знайти аналітичний вираз для коефіцієнтів \dot{C}_n ряду Фур'є цієї напруги. Побудувати АЧС та ФЧС для перших трьох гармонік.

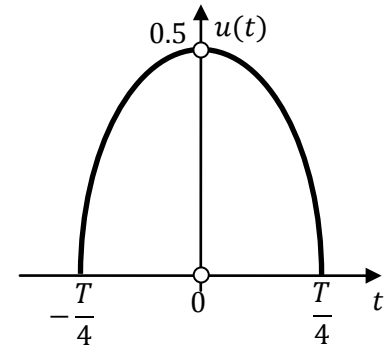


Рисунок 2.50

Розв'язання

Коефіцієнти \dot{C}_n ряду Фур'є

$$\dot{C}_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jn\omega t} dt$$

Оскільки напруга парна, то перепишемо формулу

$$\dot{C}_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega t) dt = \frac{2}{T} \int_0^{T/4} 0.5 \cos(\omega t) \cos(n\omega t) dt = \frac{1}{T} \int_0^{T/4} 0.5 \cos(\omega t) \cos(n\omega t) dt.$$

Скористаємося тригонометричною формулою

$$\cos x \cdot \sin y = 0.5 \cdot (\cos(x + y) + \cos(x - y)).$$

У результаті вираз набуде вигляду

$$\begin{aligned} \dot{C}_n &= \frac{1}{T} \int_0^{T/4} \cos(\omega t) \cos(n\omega t) dt = \frac{1}{2T} \int_0^{T/4} [\cos(\omega t + n\omega t) + \cos(\omega t - n\omega t)] dt = \\ &= \frac{\omega}{4\pi} \left[\frac{\sin(\omega t + n\omega t)}{\omega + n\omega} + \frac{\sin(\omega t - n\omega t)}{\omega - n\omega} \right] \Bigg|_0^{T/4} = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{\sin[(1+n)\omega t]}{1+n} + \frac{\sin[(1-n)\omega t]}{1-n} \right] \Bigg|_0^{T/4} = \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[\frac{\sin[(1+n)\frac{T}{4} \cdot \frac{2\pi}{T}]}{1+n} + \frac{\sin[(1-n)\frac{T}{4} \cdot \frac{2\pi}{T}]}{1-n} \right] = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{\sin[(1+n)\frac{\pi}{2}]}{1+n} + \frac{\sin[(1-n)\frac{\pi}{2}]}{1-n} \right]. \end{aligned}$$

Визначимо постійну складову коефіцієнтів \dot{C}_n ряду Фур'є

$$\dot{C}_0 = \frac{1}{4\pi} \left[\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right] = \frac{2}{4\pi} = \frac{1}{2\pi} = 0.159.$$

Розрахуємо амплітуди перших семи гармонік

$$\dot{C}_1 = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{\sin(\pi)}{2} + \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sin\left(0 \cdot \frac{\pi}{2}\right)}{0 \cdot \frac{\pi}{2}} \right] = \frac{1}{4\pi} \left[0 + \frac{\pi}{2} \right] = \frac{1}{8} = 0.125;$$

$$\dot{C}_2 = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)}{3} - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right] = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{-1}{3} + 1 \right] = \frac{1}{6\pi} = 0.053;$$

$$\dot{C}_3 = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{\sin(2\pi)}{4} - \frac{\sin(-\pi)}{2} \right] = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{0}{3} - \frac{0}{2} \right] = 0;$$

$$\begin{aligned}\dot{C}_4 &= \frac{1}{4\pi} \left[\frac{\sin\left(\frac{5\pi}{2}\right)}{5} - \frac{\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)}{3} \right] = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{5} - \frac{1}{3} \right] = -\frac{1}{3\pi} = -0.011; \\ \dot{C}_5 &= \frac{1}{4\pi} \left[\frac{\sin(3\pi)}{6} - \frac{\sin(-2\pi)}{4} \right] = \frac{1}{4\pi} [0 - 0] = 0; \\ \dot{C}_6 &= \frac{1}{4\pi} \left[\frac{\sin\left(\frac{7\pi}{2}\right)}{7} - \frac{\sin\left(-\frac{5\pi}{2}\right)}{5} \right] = \frac{1}{4\pi} \left[-\frac{1}{7} + \frac{1}{5} \right] = -\frac{1}{3\pi} = 0.0045; \\ \dot{C}_7 &= \frac{1}{4\pi} \left[\frac{\sin(4\pi)}{8} - \frac{\sin(-3\pi)}{6} \right] = \frac{1}{4\pi} [0 - 0] = 0.\end{aligned}$$

Для розрахунку коефіцієнту \dot{C}_1 ми використали співвідношення

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sin\left(x \frac{\pi}{2}\right)}{x \cdot \frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sin(y)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \left[\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sin(y)}{y} \right] = \frac{\pi}{2} \cdot 1 = \frac{\pi}{2}.$$

Побудуємо АЧС перших трьох коефіцієнтів ряду Фур'є (рис. 2.51)

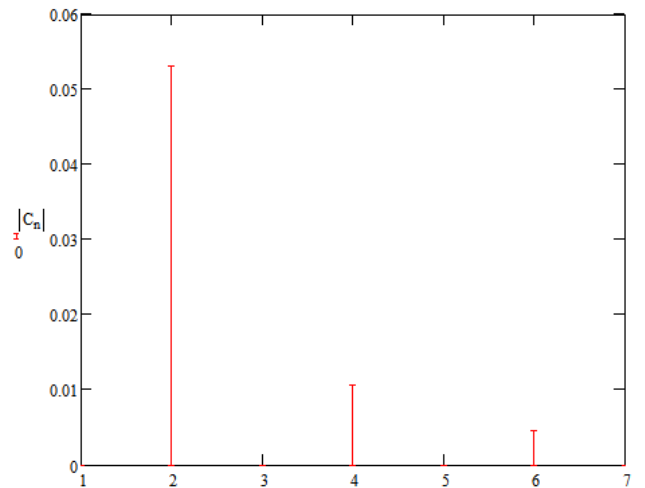


Рисунок 2.51

Відповідь: $C_n = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{\sin(1+n)\frac{\pi}{2}}{1+n} + \frac{\sin(1-n)\frac{\pi}{2}}{1-n} \right].$

Приклад 2.23. Періодична послідовність трикутних імпульсів (рис. 2.52) подана на рис. 1, $E = 4$ В. Знайти аналітичний вираз для коефіцієнтів C_n . Побудувати АЧС для 10-ти гармонік.

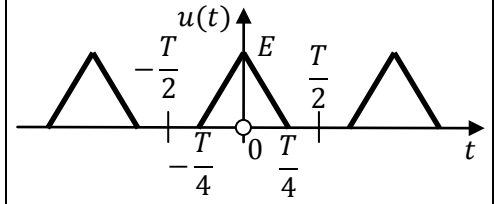


Рисунок 2.52

Розв'язання

Функція спектральної густини одиничного трикутного імпульсу

$$S(\omega) = \frac{E\tau}{2} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right).$$

Зв'язок між функцією спектральної густини одиничного імпульсу та періодичною послідовністю таких імпульсів

$$\begin{aligned} \dot{C}_n &= \frac{1}{T} S(n\omega) = \frac{E\tau}{2T} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{n\omega\tau}{4}\right) = \frac{E\tau}{2T} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{2\pi n\tau}{4T}\right) = \frac{ET}{2T} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi nT}{2T}\right) = \\ &= \frac{E}{4} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi n}{4}\right) = \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi n}{4}\right). \end{aligned}$$

Колова частота

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}.$$

Коефіцієнти C_n ряду Фурє

$$\dot{C}_1 = \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.811; \quad \dot{C}_2 = \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.405;$$

$$\dot{C}_3 = \operatorname{sinc}^2\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 0.09; \quad \dot{C}_4 = \operatorname{sinc}^2(\pi) = 0; \quad \dot{C}_5 = \operatorname{sinc}^2\left(\frac{5\pi}{4}\right) = 0.032.$$

Побудуємо АЧС коефіцієнтів \dot{C}_n (рис. 2.53)

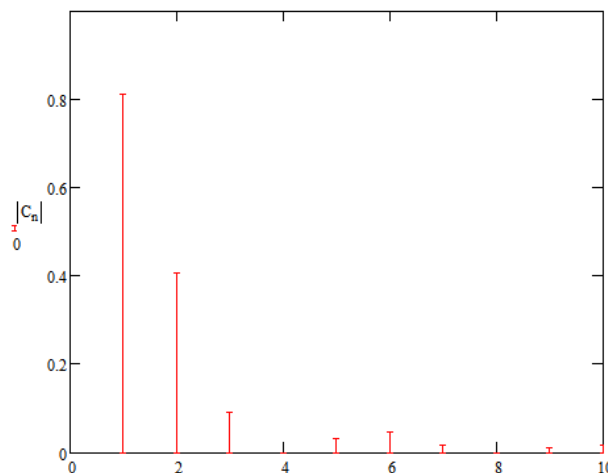


Рисунок 2.53

Відповідь: $\dot{C}_n = \operatorname{sinc}^2\left(n\frac{\pi}{4}\right).$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Процеси в лінійних електронних схемах. Збірник задач [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студентів спеціальності 172 «Телекомунікації та радіотехніка» / А. В. Булашенко, М. І. Ястребов; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл 2.44 Мбайт). – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. – 100 с.
2. Методичні вказівки до практичних занять з дисципліни «Процеси в лінійних електронних схемах» на тему «Елементи спектрального аналізу» для студентів радіотехнічного факультету спеціальності 172 Телекомунікації та радіотехніка / Укладачі А. В. Булашенко, М. І. Ястребов. – К.: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. – 36с
3. Процеси в лінійних електронних схемах. Розрахунок схемних функцій та чотириполіусників складних кіл. Практикум. [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студентів спеціальності 172 «Телекомунікації та радіотехніка», / А. В. Булашенко, М. І. Ястребов; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл 1.22 Мбайт). – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. – 48с.
4. Процеси в лінійних електронних схемах. Розрахунок перехідних процесів складних схем операторним, часовим та класичним методами. Практикум. [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студентів спеціальності 172 «Телекомунікації та радіотехніка» / А. В. Булашенко, М. І. Ястребов; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл 1.60 Мбайт). – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. – 56с.
5. Основи теорії кіл. Розрахунок лінійних електричних кіл постійного струму. Практикум. [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студентів спеціальності 172 «Телекомунікації та радіотехніка» / А. В. Булашенко, М.І. Ястребов; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл 1.57 Мбайт). – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. – 62с.
6. Основи теорії та комп'ютерне моделювання електронних кіл: навчальний посібник [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студентів спеціальності 172 «Телекомунікації та радіотехніка» / В. Д. Сташук, А.В. Булашенко; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл 6.58 Мбайт). – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. – 400с.
7. Основи теорії кіл. Розрахунок лінійних електричних кіл змінного струму. Практикум. [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студентів спеціальності 172 «Телекомунікації та радіотехніка» / А. В. Булашенко; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл 1.31 Мбайт). – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. – 48 с.
8. Основи теорії кіл. Підготовка до фахового вступного випробування [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студентів спеціальності 172 «Телекомунікації та радіотехніка» / А. В. Булашенко; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Елек-

- тронні текстові дані (1 файл 1.43 Мбайт). – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. – 100 с.
9. Методичні вказівки до виконання курсової роботи з дисципліни «Процеси в лінійних електронних схемах» для студентів радіотехнічного факультету напряму спеціальності «Телекомунікації та радіотехніка» [Електронний ресурс] / НТУУ «КПІ»; уклад. А. В. Булашенко, М. І. Ястребов. – Електронні текстові дані (1 файл: 900,58 Кбайт). – Київ : НТУУ «КПІ», 2017. – 69 с.
 10. Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт з дисципліни «Процеси в лінійних електронних схемах» для студентів радіотехнічного факультету спеціальності 172 телекомунікації та радіотехніка/ Укладачі: М. І. Ястребов, А.В. Булашенко. – К.: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2017. – 20.
 11. Методичні вказівки до практичних занять з дисципліни «Основи теорії кіл» на тему «Розрахунок коливальних контурів» для студентів радіотехнічного факультету спеціальності 172 Телекомунікації та радіотехніка / Укладачі: А. В. Булашенко, М. І. Ястребов. – К.: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. – 39с.
 12. Зернов Н. В. Теория радиотехнических цепей / Н.В. Зернов, В.Г. Карпов. – Л.: Энергия, 1972. – 916с.
 13. Баскаков С. И. Лекции по теории цепей: учебное пособие. – М.: Либроком, 2016. – 277с.
 14. Баскаков С. И. Радиотехнические цепи и сигналы. Руководство к решению задач. – М.: Высшая школа, 2002. – 214с.
 15. Попов В.П. Основы теории цепей. В 2 ч. Часть 1. – 7-е изд., перероб. и доп. / В.П. Петров, В.А. Ляшев, Н.И. Мережин. – М.: Издательство Юрайт, 2016. – 378с.
 16. Попов В.П. Основы теории цепей. В 2 ч. Часть 2. – 7-е изд., перероб. и доп. / В.П. Петров, В.А. Ляшев, Н.И. Мережин – М.: Издательство Юрайт, 2019. – 323с.
 17. Атабеков Г. И. Основы теории цепей: учебник. – 2-е изд. СПб.: Изд-во «Лань», 2006. – 432 с.
 18. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы: учебник для вузов. – 4-е изд., переаб и доп. – М.: Радио и связь, 1986. – 512.
 19. Основы теорії кіл: підручник для студентів вищих навчальних закладів. Ч.2 / Ю. О. Коваль, Л. В. Гринченко, І. О. Мілютенко, О.І. Рибіна; за аг. Редакцією В.М. Шокала та В. І. Правди. – Х.: Компанія Сміт, 2008. – 560 с.
 20. Основы теорії кіл: У 3 кн. Кн. 2. Аналіз лінійних електричних кіл. Частотна область: Підручник. / М. Б. Гумен, А. М. Гуржій, В. М. Співак. – К.: Вища школа, 2004. – 358с.
 21. Новгородцев А. Б. 30 лекций по теории электрических цепей: учебник для вузов. – СПб.: Политехника, 1995. – 519с.
 22. Бычков Ю. А. Сборник задач и практикум по основам теории цепей / Ю.А. Бычков, В.М. Золотницкий, Э.П. Чернышов – 2-е изд. – СПб.: Питер, 2007. – 300с.

23. Шебес М. Р. Задачник по теории электрических цепей: учебное пособие для электротехнических, радиотехнических специальностей вузов / М.Р. Шебес, М.В. Каблукова. – 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Высшая школа, 1990. – 544с.
24. Сборник задач и упражнений по теоретическим основам электротехники: учеб. пособие для вузов / под ред. проф. П. А. Ионкина. – М.: Энергоиздат, 1982. – 768с.
25. Сборник задач и упражнений по теоретическим основам электротехники: учеб. пособие для энерг. и приборостр. спец. вузов. – 4-е изд., перераб. и испр. / под ред. Л. А. Бесснова. – М.: Высш. шк., 2003. – 528с.
26. Пономаренко В. К. Пособие к практическим занятиям по теории электрических цепей: учеб. пособие – 2-е изд., перераб. и доп. – Озерск: ОТИ МИФИ, 2001. – 200с.
27. Атабеков Г. И. Основы теории цепей. – М.: Энергия, 1969. – 424с.
28. Зевеке Г.В. Основы теории цепей: учебник для вузов / Г. В. Зевеке, П.А. Ионкин. – М.: Энергоатомиздат, 1989. – 528 с.
29. Основы теории электронных схем / В.П. Сигорский, А.И. Петренко. – К.: Вища школа, 1971. – 568с.
30. Методичні вказівки до виконання роз.-граф. роботи № 1 для студентів на пряму підготовки «Радіотехніка» з дисципліни «Основи теорії кіл» / Укладачі А. В. Булашенко, М. І. Ястребов. – К.: НТУУ «КПІ», 2015. – 56с.
31. Теорія електричних та магнітних кіл: конспект лекцій п'яти частинах. - Частина 1: Лінійні електричні кола постійного та змінного струмів / Укладач А. В. Булашенко. – Суми: Вид-во СумДУ, 2010. – 183с.
32. Теорія електричних та магнітних кіл: конспект лекцій у п'яти частинах. – Частина 2: Складні лінійні електричні кола змінного струму / Укладач А.В. Булашенко – Суми: Вид-во СумДУ, 2010. – 173с.
33. Забегалов І. В. Методичні вказівки до лабораторних занять з дисципліни “Електротехніка”: для студ. спец. 6.090220 “Обладнання хімічних виробництв та підприємств будівельних матеріалів” усіх форм навчання / І. В. Забегалов, А. В. Булашенко. – Суми : СумДУ, 2012. – 137 с.
34. Булашенко А.В. Побудова векторних діаграм за допомогою математичного пакету MathCAD / А.В. Булашенко // Науково-методична конференція викладачів, співробітників і студентів : тези доповідей, 27 квітня 2010 року / Конотопський ін-т СумДУ; Відп. за вип. Н.В. Барбара, О.С. Заїка. — Суми : СумДУ, 2010. – Ч.2. – С. 10-13.
35. Булашенко, АВ Розробка віртуальних лабораторних робіт із дисципліни "Теорія електричних та магнітних кіл"/А.В. Булашенко//Науково-методична конференція викладачів, співробітників і студентів: тези доповідей, 23 квітня 2009 року/Відп. за вип. ТМ Гричановська.-Суми: СумДУ, 2009.-Ч. 1.-С. 69-70.
36. Булашенко, А.В. Навчальний посібник з ТЕМК / А.В. Булашенко // Науково-методична конференція викладачів, співробітників і студентів : тези до-

- повідей, 27 квітня 2010 року / Конотопський ін-т СумДУ; Відп. за вип. Н.В. Барбара, О.С. Заїка. — Суми : СумДУ, 2010. — Ч.2. — С. 122-124.
- 37.Кролевецький О.В. Спосіб оцінки струму витоку / О.В. Кролевецький, І.В. Забегалов, А.В. Булашенко // Освіта, наука та виробництво: розвиток і перспективи: матеріали III Всеукраїнської науково-методичної конференції, м. Шостка, 19 квітня 2018 р. — Суми: СумДУ, 2018. — С. 165-166.
- 38.Булашенко А.В. Конструкція портативного цифрового мегомметра та вимірювача струму витоку / А.В. Булашенко, І.В. Забегалов // Вісник Вінницького політехнічного інституту. — 2020. — № 3. — Вінниця: ВНТУ, 2020. — С. 37-42.
- 39.Булашенко А.В. Методичний комплекс з ТЕМК / А.В. Булашенко // Науково-методична конференція викладачів, співробітників і студентів : тези доповідей, 27 квітня 2010 року / Конотопський ін-т СумДУ; Відп. за вип. Н.В. Барбара, О.С. Заїка. — Суми : СумДУ, 2010. — Ч.2. — С. 111-112.
- 40.Булашенко, А. В. Інформатика : конспект лекцій у 4-х ч. для студ. спец. 6.090220 “Обладнання хімічних виробництв та підприємств будівельних матеріалів” усіх форм навчання. — Ч.4. Обробка інженерної інформації за допомогою математичного пакета MathCAD / А. В. Булашенко. — Суми : СумДУ, 2010. — 122 с.
- 41.Булашенко А.В. Діагностика пасивних кіл методом вузлових опорів / А.В. Булашенко, Т.Г. Циганчук // Міжнародна науково-технічна конференція «Радіотехнічні поля, сигнали, апарати та системи». Київ, 19 – 25 березня 2018 р — Київ, 2018. — С. 130 – 132.
- 42.Булашенко А. В. Оцінка зв'язності D2D комунікацій у мережах 5G / А.В. Булашенко// Вісник НТУУ «КПІ». Серія Радіотехніка, Радіоапаратобудування. — 2020 — № 81. — С. 21-29. doi: <https://doi.org/10.20535/RADAR.2020.81.21-29>.
- 43.Булашенко. А.В. Принципи формування променя інтелектуальних антен / А.В. Булашенко // Вісник Сумського державного університету. Серія Технічні науки. — 2010. — №1. — С. 111-120.
- 44.Булашенко А. В. Живлення антенних решіток на основі лінз Ротмана (огляд) / А. В. Булашенко, Ф. Ф. Дубровка // Вісник Сумського державного університету. Серія Технічні науки. — 2010. — №3, Т.2. — С. 113-120.
- 45.Харкевич, А. А. Спектры и анализ: монография / А. А. Харкевич. — М. : Ленанд, 2018. — 236 с.
- 46.Денисенко А. Н. Сигналы. Теоретическая радиотехника. Справочное пособие / А. Н. Денисенко — М. : Горячая линия–Телеком, 2005. — 704 с.

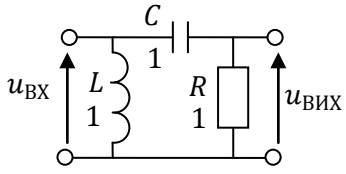
ДОДАТОК А

Приклад модульної контрольної роботи
(an example of a modular control robot)

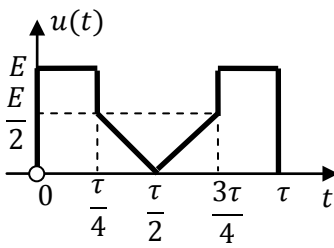
МОДУЛЬНА КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 3

на тему «**Основи спектрального аналізу**»
з дисципліни «Процеси в лінійних електронних схемах»

Варіант № 13

<p>Задача 1. У схемі (рис. 1) одержати коефіцієнт передачі за напругою, побудувати його АЧХ та ФЧХ. Записати напругу $u_{ВИХ}(t)$, якщо на вході діє напруга на частоті $\omega = 10^6 \text{ рад/с}$</p> <p>$u_{ВХ}(t) = 3 + 10 \cos(\omega t + 5^\circ) + 6 \cos(2\omega t - 12^\circ)$, В.</p> <p>Числові значення елементів такі: опір в кОм, ємності в нФ, індуктивності в мГн.</p>	 <p align="center"><i>Рисунок 1</i></p>
Оцінювання – 2 бали	

Задача 2. Коефіцієнт передачі за напругою лінійного кола описується виразом
$\dot{K}(\omega) = 5 + 7\omega e^{j\frac{\pi}{2}}.$
На вхід подається напруга $u_{\text{ВХ}}(t) = t^3 - t^2$ В. Записати вираз для вихідної напруги. Пояснити одержаний результат.
Оцінювання – 1 бал

<p>Задача 3. Визначити ФСГ напруги $u(t)$ (рис. 3) із амплітуда $E = 4$ В, тривалість $\tau = 12$ мкс. Перевірити значення ФСГ у точці $S(0)$, визначивши її двома способами.</p>	 <p align="center"><i>Рисунок 3</i></p>
Оцінювання – 2 бали	

ДОДАТОК Б

Таблиця А.1 - Таблиця перетворення Лапласа

Оригінал	Зображення	Оригінал	Зображення
1	$\frac{1}{p}$	$(1 - \alpha t)e^{\pm \alpha t}$	$\frac{p}{(p \mp \alpha)^2}$
t	$\frac{1}{p^2}$	$\frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t})$	$\frac{1}{p(p + \alpha)}$
$e^{\pm \alpha t}$	$\frac{1}{p \mp \alpha}$	$\cos(\omega_0 t)$	$\frac{p}{p^2 + \omega_0^2}$
$e^{\pm j\omega_0 t}$	$\frac{1}{p \mp j\omega_0}$	$\sin(\omega_0 t)$	$\frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2}$
$e^{\pm j(\omega_0 t + \varphi)}$	$\frac{e^{j\psi}}{p \mp j\omega_0}$	$\sin(\omega_0 t + \psi)$	$\frac{p \cdot \sin(\psi) - \omega_0 \cdot \cos(\psi)}{p^2 + \omega_0^2}$
$te^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(p + \alpha)^2}$	$e^{-\alpha t} \sin(\omega_0 t)$	$\frac{\omega_0}{(p + \alpha)^2 + \omega_0^2}$
$\frac{1}{\alpha - \beta}(e^{\beta t} - e^{\alpha t})$	$\frac{1}{(p + \alpha)(p + \beta)}$	$e^{-\alpha t} \cos(\omega_0 t)$	$\frac{p + \alpha}{(p + \alpha)^2 + \omega_0^2}$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$\cos(\omega_0 t + \varphi)$	$\frac{p \cdot \cos(\varphi) + \omega_0 \cdot \sin(\varphi)}{p^2 + \omega_0^2}$
$ch(at)$	$\frac{a}{p^2 - a^2}$	$sh(at)$	$\frac{a}{p^2 + a^2}$
$\frac{1}{a}(e^{at} - 1)$	$\frac{1}{p(p - a)}$	$1 - e^{-t/a}$	$\frac{1}{p(1 + ap)}$
$\frac{1}{a^2}te^{-\frac{t}{a}}$	$\frac{1}{(1 + ap)^2}$	$\frac{e^{at} - e^{bt}}{a - b}$	$\frac{1}{(p - a)(p - b)}$
$(1 + at)e^{at}$	$\frac{p}{(p - a)^2}$	$\frac{1}{a^2}(e^{at} - 1 - at)$	$\frac{1}{(p - a)p^2}$
$\frac{1}{2}t^2e^{at}$	$\frac{1}{(p - a)^3}$	$(t + \frac{1}{2}at^2)e^{at}$	$\frac{p}{(p - a)^3}$
$\cos^2(at)$	$\frac{p^2 + 2a^2}{p(p^2 + 4a^2)}$	$\sin^2(at)$	$\frac{2a^2}{p(p^2 + 4a^2)}$
$ch^2(at)$	$\frac{p^2 - 2a^2}{p(p^2 - 4a^2)}$	$sh^2(at)$	$\frac{2a^2}{p(p^2 - 4a^2)}$

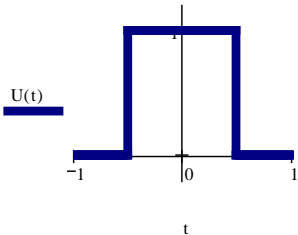
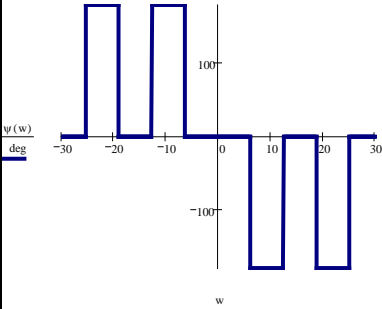
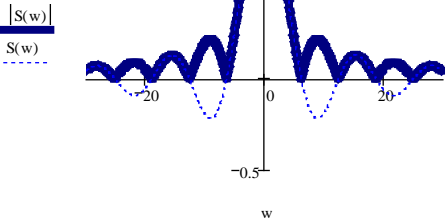
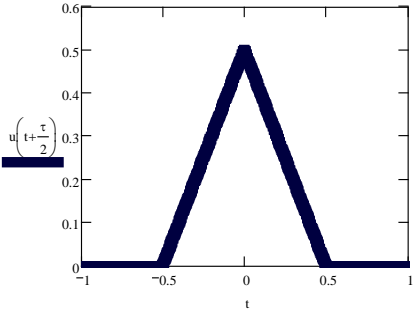
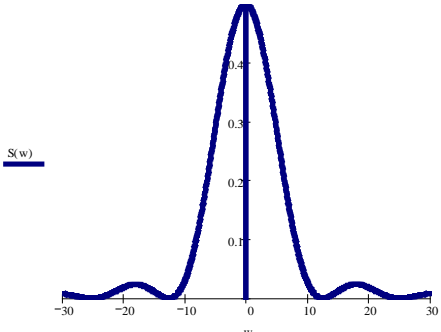
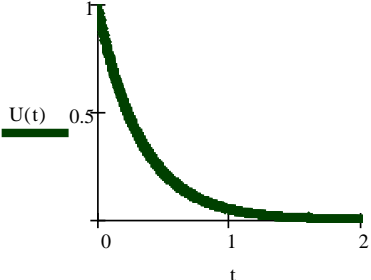
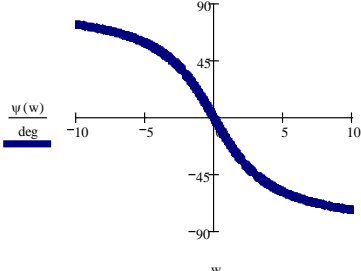
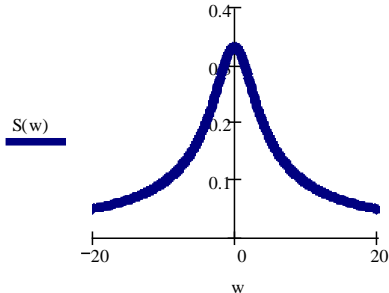
ДОДАТОК В**Властивості перетворення Фур'є**

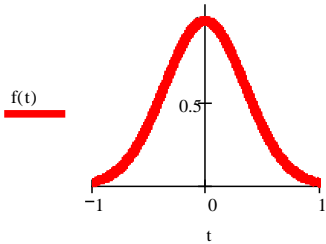
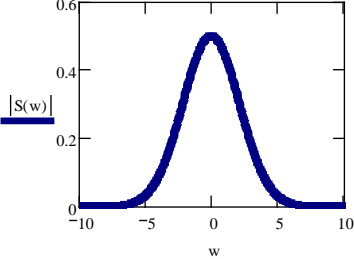
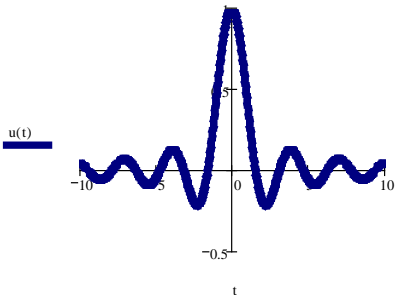
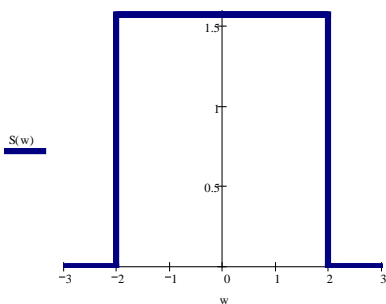
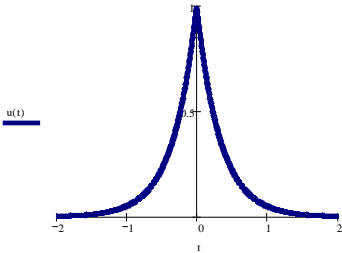
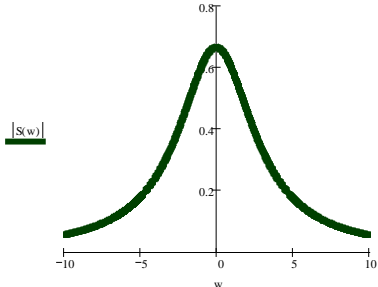
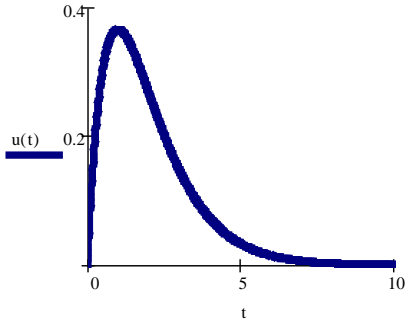
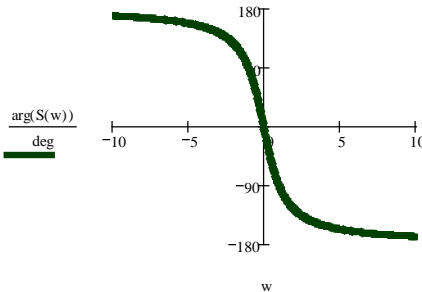
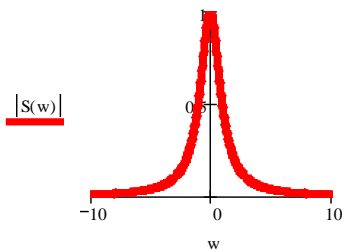
Якщо сигнал $f_1(t)$ має спектральну характеристику $S_1(\omega)$, а сигнал $f_2(t) - S_2(\omega)$, то мають місце такі властивості

№	Властивість	Математичний опис
1	Лінійності	$\sum_{i=1}^n a_i f_i(t) \rightarrow \sum_{i=1}^n a_i S_i(\omega).$
2	Масштабів	$f(at) \rightarrow \frac{1}{a} S\left(\frac{\omega}{a}\right).$
3	Зсуву сигналу у часі	$f(t + t_0) \rightarrow S(\omega) e^{-j\omega t_0}.$
4	Зсув спектру сигналу за частотою	$f(t) e^{\pm j\omega_0 t} \rightarrow S(\omega \mp \omega_0)$
5	Диференціювання сигналу	$\frac{df(t)}{dt} \rightarrow j\omega \cdot S(\omega).$
6	Інтегрування сигналу	$\int_0^t f(t) dt \rightarrow \frac{S(\omega)}{j\omega}.$
7	Диференціювання спектру сигналу	$f(t)(-jt) \rightarrow \frac{dS(\omega)}{j\omega}$
8	Інтегрування спектру сигналу	$\frac{f(t)}{-jt} \rightarrow \int_{-\infty}^{\omega} S(\omega) d\omega$
9	Згортка двох сигналів	$f_1(t) * f_2(t) \rightarrow S_1(\omega) \cdot S_2(\omega).$
10	Множення двох сигналів	$f_1(t) \cdot f_2(t) \rightarrow \frac{1}{2\pi} S_1(\omega) * S_2(\omega).$

ДОДАТОК Г

Спектри деяких сигналів

Сигнал	Спектральна функція або ФЧС	Графік спектру та АЧС
 <p>Сигнал</p> $U(t) = E \left[1 \left(t + \frac{\tau}{2} \right) - 1 \left(t - \frac{\tau}{2} \right) \right];$	 <p>Фазовий спектр</p> $\varphi(\omega) = \begin{cases} -\pi, & \omega > 0, \\ +\pi, & \omega < 0; \end{cases}$	
	$U(t) = E \left[\left(t + \frac{\tau}{2} \right) 1 \left(t + \frac{\tau}{2} \right) - 2t \cdot 1(t) + \left(t - \frac{\tau}{2} \right) 1 \left(t - \frac{\tau}{2} \right) \right];$ <p>Спектр сигналу</p> $S(\omega) = \frac{E\tau}{2} \cdot \text{sinc}^2 \left(\frac{\omega\tau}{4} \right).$	
 <p>Сигнал</p> $u(t) = E e^{-at}.$	 <p>Спектр фаз</p> $\varphi(\omega) = -\arctg \left(\frac{\omega}{a} \right).$	 <p>Спектр амплітуд</p> $ S(\omega) = \frac{E}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}.$

Сигнал	Спектральна функція	Графік спектру
	<p>Сигнал</p> $u(t) = e^{-(at)^2}.$ <p>Спектр амплітуд визначається виразом</p> $S(\omega) = \frac{1}{a} e^{-\left(\frac{\omega}{2a}\right)^2} \sqrt{\pi}.$	
	<p>Сигнал</p> $u(t) = E \frac{\sin \Omega t}{\Omega t}.$ <p>Спектр амплітуд визначається виразом</p> $S(\omega) = E \frac{\pi}{\Omega} (1(\omega + \Omega) - 1(\omega - \Omega)).$	
	<p>Сигнал</p> $u(t) = E e^{-a t }.$ <p>Спектр амплітуд визначається виразом</p> $ S(\omega) = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}.$	
 <p>Сигнал</p> $u(t) = E t e^{-at}.$	 <p>Спектр амплітуд</p> $\varphi(\omega) = -\arctg\left(\frac{-2a\omega}{a^2 - \omega^2}\right).$	 <p>Спектр амплітуд визначається виразом</p> $S(\omega) = \frac{1}{(a + j\omega)^2}.$

ДОДАТОК Д**Корисні тригонометричні формули**

1. Формули додавання аргументів:

$$\begin{aligned}\sin(x \pm y) &= \sin x \cos y \pm \cos x \sin y; \\ \cos(x \pm y) &= \cos x \cos y \pm \sin x \sin y; \\ \operatorname{tg}(x \pm y) &= \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}; \quad \operatorname{ctg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y \mp 1}{\operatorname{ctg} y \pm \operatorname{ctg} x}.\end{aligned}$$

2. Формули пониження степеня:

$$\begin{aligned}\sin^2 x &= \frac{1 - \cos 2x}{2}; \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}; \\ \sin^3 x &= \frac{3 \sin x - \sin 3x}{4}; \quad \cos^3 x = \frac{3 \cos x + \cos 3x}{4}; \\ \sin^4 x &= \frac{3 - 4 \cos 2x + \cos 4x}{8}; \quad \cos^4 x = \frac{3 + 4 \cos 2x + \cos 4x}{8}.\end{aligned}$$

3. Формули перетворення добутку функцій:

$$\begin{aligned}\sin x \sin y &= \frac{\cos(x - y) - \cos(x + y)}{2}; \quad \sin x \cos y = \frac{\sin(x + y) + \sin(x - y)}{2}; \\ \cos x \cos y &= \frac{\cos(x + y) + \cos(x - y)}{2}.\end{aligned}$$

4. Формули перетворення суми функцій:

$$\begin{aligned}\sin x \pm \sin y &= 2 \sin \frac{x \pm y}{2} \cos \frac{x \mp y}{2}; \\ \cos x + \cos y &= 2 \cos \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2}; \quad \cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x + y}{2} \sin \frac{x - y}{2}; \\ \operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y &= \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cos y}; \quad \operatorname{ctg} x \pm \operatorname{ctg} y = \frac{\sin(x \pm y)}{\sin x \sin y}.\end{aligned}$$

5. Формули подвійного та потрійного кутів:

$$\begin{aligned}\sin 2x &= 2 \sin x \cos x; \\ \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x; \\ \sin 3x &= 3 \sin x - 4 \sin^3 x; \quad \cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x; \\ \operatorname{tg} 2x &= \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}; \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{2 \operatorname{ctg} x}; \quad \operatorname{tg} 3x = \frac{3 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 x}; \\ \operatorname{ctg} 3x &= \frac{3 \operatorname{ctg}^2 x - 1}{2 \operatorname{ctg} x} = \frac{3 \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg}^3 x}{1 - 3 \operatorname{ctg}^2 x}.\end{aligned}$$

6. Допоміжний аргумент:

$$\begin{aligned}a \sin x \pm b \cos x &= \sqrt{a^2 + b^2} \sin \left(x \pm \arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right); \\ a \cos x \pm b \sin x &= \sqrt{a^2 + b^2} \cos \left(x \mp \arccos \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right).\end{aligned}$$

7. Формули Ейлера:

$$\begin{aligned}\sin x &= \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}; \quad \cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}; \\ e^{jx} &= \cos x + j \sin x; \quad e^{-jx} = \cos x - j \sin x.\end{aligned}$$

ДОДАТОК Е**Корисні формули диференціювання****Правила диференціювання**

Нехай задані диференційовані функції $U = u(x)$, $V = v(x)$

1. Похідна алгебраїчної суми кінцевого числа диференційованих функцій дорівнює сумі похідних цих функцій

$$\frac{d}{dx} [U \pm V] = \frac{d}{dx} [U] \pm \frac{d}{dx} [V].$$

2. Похідна добутку двох диференційованих функцій дорівнює сумі добутку похідної першого співмножника на другий та добутку похідної другого співмножника на перший:

$$\frac{d}{dx} [U \cdot V] = \frac{d}{dx} [U] \cdot V + \frac{d}{dx} [V] \cdot U.$$

3. Похідна частки визначається виразом

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{U}{V} \right] = \frac{\frac{d}{dx} [U] \cdot V - \frac{d}{dx} [V] \cdot U}{V^2}.$$

Таблиця похідних деяких функцій

Функція	Похідна функції	Функція	Похідна функції
$\sin x$	$\cos x$	x^c	cx^{c-1}
$\cos x$	$-\sin x$	$ x $	$\text{sign } x$
$\text{tg } x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\text{ctg } x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\frac{1}{x^c}$	$-\frac{c}{x^{c+1}}$
e^x	e^x	\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
$\log_a x$	$\frac{\log_a e}{x}$	c^x	$c^x \ln c$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\text{arctg } x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\text{arcctg } x$	$\frac{-1}{1+x^2}$
$\text{arcsec } x$	$\frac{1}{ x \sqrt{x^2-1}}$	$\text{arccos } x$	$\frac{-1}{ x \sqrt{x^2-1}}$
$\text{sh } x$	$\text{ch } x$	$\text{ch } x$	$\text{sh } x$

Формула інтегрування частинами

$$\int_0^{\infty} u dv = u \cdot v \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} v du.$$